



Etudes numériques sur la production, la diffusion et la manipulation d'ondes de matière

Francois Vermersch

► To cite this version:

Francois Vermersch. Etudes numériques sur la production, la diffusion et la manipulation d'ondes de matière. Physique [physics]. Université Paul Sabatier, 2012. Français. NNT : . tel-01260672

HAL Id: tel-01260672

<https://hal.science/tel-01260672>

Submitted on 22 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*

Discipline ou spécialité : *Physique de la Matière*

Présentée et soutenue par *François Vermersch*

Le *27 novembre 2012*

Titre : *Etudes numériques sur la production, la diffusion et la manipulation d'ondes de matière*

JURY

Mme Patrizia Vignolo, professeur, université de Nice - Rapporteur
Mr Jean-Claude Garreau, directeur de recherche, université de Lille - Rapporteur
Mr Daniel Braun, professeur, université de Toulouse - Examineur
Mr Juan Gonzalo Muga, professeur, université de Bilbao - Examineur

Ecole doctorale : *SDM - Sciences de la matière*
Unité de recherche : *Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité*
Directeur(s) de Thèse : *David Guéry-Odelin*
Rapporteurs :

Remerciements

Le travail de thèse qui est reporté dans ce manuscrit a été effectué au Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité. Je voudrais commencer par remercier tout particulièrement le directeur du laboratoire : Jacques Vigué pour m' avoir accueilli dans le laboratoire pendant ces trois ans.

Je tiens ensuite à remercier vivement les membres de mon jury de thèse : Patrizia Vignolo et Jean-Claude Garreau qui ont été rapporteurs de ce manuscrit de thèse, Daniel Braun pour avoir présidé le jury et Gonzalo Muga pour ses remarques constructives sur le manuscrit et les résultats.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement mon équipe et surtout mon directeur de thèse David Guéry-Odelin pour ses conseils tant sur le plan scientifique qu'humain. Merci à Thierry Lahaye, Renaud Mathevet et Gianluca Gattobigio pour les quelques mois passés ensemble sur la manip'. Je voudrais continuer par remercier mes deux co-thésards de choc : Charlotte Fabre pour ton soutien constant et Pierrick Cheiney pour les footings sur le canal, les mac do... Bon courage aux nouveaux thésards Gabriel Condon et François Damon ! Je voudrais aussi remercier Bertrand Georgeot pour nos collaborations et discussions, Didier Lemoine pour m' avoir mis à disposition les noeuds de calculs 0 à 21. Je m'excuse encore une fois des nombreux plantages. Merci aussi à Bruno Lepetit pour ton soutien constant. Merci à Jonathan, sans toi la conf' à Cracovie aurait été bien triste. Enfin, je souhaite remercier ma famille et ma belle famille pour leur soutien constant. Cette thèse, aboutissement de longues années d'études, je la dois beaucoup à mes parents exceptionnels avec qui j' ai vécu dans un climat toujours serein et positif.

Pour conclure, je souhaite bien évidemment remercier mon extraordinaire femme Myriam qui me supporte avec amour depuis presque 6 ans (et c'est pas près de finir !) et sans qui rien n'aurait été possible. Ma Mimi, cette thèse t'est dédiée ainsi qu'à nos enfants.

Table des matières

Introduction	11
1 Dispersion des vitesses d'un condensat dans un potentiel dépendant du temps	15
1.1 Condensat de Bose-Einstein sans interactions dans un potentiel harmonique dépendant du temps	16
1.1.1 Gaz dilués à l'équilibre et en l'absence d'interactions	16
1.1.2 Rappel sur la méthode des lois d'échelle : cas sans interactions . . .	17
1.1.3 Dynamique dans l'espace des vitesses d'un condensat en l'absence d'interaction	18
1.2 Rappel sur les condensats à l'équilibre en présence d'interactions inter-atomiques	18
1.2.1 Equation de Gross-Pitaevskii	18
1.2.2 Réduction de dimensionnalité	19
1.2.3 Approximation de Thomas-Fermi	21
1.2.4 Énergie cinétique d'un condensat dans le régime de Thomas-Fermi .	24
1.3 Analyse de la dynamique d'un BEC dans la limite de Thomas-Fermi dans l'espace des impulsions	25
1.3.1 Equations d'évolution de la fonction d'onde	26
1.3.2 Ouverture brutale, conservation de l'énergie	27
1.3.3 Dynamique de l'énergie cinétique par integration du théorème de Ehrenfest	28
1.3.4 Ouverture générale	28
1.3.5 Espace à une dimension	29
1.3.6 Généralisation dans un espace isotrope	29
1.3.7 Transfert de l'énergie d'interactions dans le cas d'une coupure brutale du potentiel confinant	29
1.4 Méthode pour court-circuiter l'adiabaticité	32
1.4.1 Échelle de temps de l' <i>adiabaticité</i>	32
1.4.2 "Shortcut to adiabaticity" dans l'espace des vitesses en dimension un	32
1.5 Dynamique dans l'espace des impulsions d'un BEC avec interactions dans un potentiel harmonique anisotrope à deux dimensions	35
1.5.1 Énergie cinétique du condensat dans le régime de Thomas-Fermi . .	35

1.5.2	Dynamique de l'énergie cinétique d'un condensat en présence d'interactions dans un piège anisotrope	36
2	Découplage d'un laser à atomes	39
2.1	Problématique	39
2.1.1	Introduction	39
2.1.2	Position du problème et ordres de grandeur	40
2.2	Propriétés d'un paquet atomique en présence d'un champ de force constant	42
2.2.1	Dispersion de vitesse $\Delta v(t)$: cas classique	42
2.2.2	Dispersion de vitesse $\Delta v(t)$: cas quantique sans interactions	43
2.2.3	Dispersion de vitesse $\Delta v(t)$: cas quantique avec interactions	44
2.3	Découplage d'un gaz classique	44
2.3.1	Modèle classique du découplage d'un potentiel harmonique tronqué .	44
2.4	Découplage 1D d'un gaz idéal : cas quantique	45
2.4.1	Forme du paquet d'onde après découplage classique et quantique . .	45
2.4.2	Etude énergétique	46
2.4.3	Dispersion de vitesse $\Delta v(t)$	50
2.4.4	Conclusion découplage d'un gaz sans interaction	52
2.5	Découplage 1D d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'interactions .	53
2.5.1	Dispersion de vitesses longitudinales $\Delta v(t)$	54
2.5.2	Etude de la phase de décrochage, de la rupture d'adiabaticité, départ des atomes	56
2.6	Découplage 2D d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'interactions .	57
2.6.1	Potentils de piégeage	58
2.6.2	La dispersion en vitesse longitudinale $\Delta v_x(t)$	58
2.6.3	Excitations transverses	58
2.6.4	Coupure brutale du potentiel confinant	59
2.7	Façonnage du flux $J(t)$	60
3	Diffusion d'une onde de matière sur un réseau optique	65
3.1	Position du problème et caractérisation du potentiel optique	65
3.1.1	Potentiel modèle	66
3.1.2	Caractérisation du potentiel	67
3.2	Première approche : Analyse par ondes planes	67
3.2.1	Réseau d'extension infinie	68
3.2.2	Réseau d'extension finie	70
3.2.3	Interprétation de la réflexion de Bragg en termes de phase cumulée .	74
3.3	Dynamique d'un paquet d'ondes sur réseau attractif d'enveloppe carrée . . .	76
3.3.1	Pénétrabilité du paquet atomique dans le réseau	76
3.3.2	Vitesse du paquet d'onde dans le réseau	77
3.3.3	Projection sur les états de Bloch	78
3.4	Dynamique d'un paquet d'ondes sur réseau attractif d'enveloppe gaussienne	80

3.4.1	Pseudo état de Bloch	80
3.4.2	Transition Landau-Zener	81
3.4.3	Effet de la dispersion de vitesse du paquet d'onde	81
3.5	Comparaison à l'expérience	82
3.5.1	Analyse de la dynamique pour une profondeur donnée	82
3.5.2	Analyse en fonction de la profondeur	85
4	Diffusion sur un réseau dépendant du temps	89
4.1	Modulation d'intensité	89
4.1.1	Première approche : réseau d'enveloppe carrée	90
4.1.2	Modulation d'un réseau d'enveloppe gaussienne	92
4.1.3	De l'équivalence du réseau modulé à un réseau mobile	96
4.2	Réseau attractif dont le motif se déplace à vitesse constante	97
4.2.1	Potentiel réseau	98
4.2.2	Analyse en fonction de la profondeur	99
4.3	Effet cavité	100
4.3.1	Passage sur bande piégée par modulation	100
4.3.2	Piégeage sur le réseau par réflexion de Bragg - effet d'enveloppe . . .	101
5	Réflexion de Bragg en présence d'un confinement transverse fort	105
5.1	Problématique	105
5.1.1	Introduction	105
5.1.2	Potentiel modèle	106
5.2	Mise en place expérimentale	106
5.2.1	Proposition de confinement par un réseau optique	107
5.2.2	Les ordres de grandeur avec le laser verdi	108
5.3	Signature Expérimentale	108
5.3.1	Absorption de quanta	108
5.3.2	Amplification de la réflexion	109
5.3.3	Piégeage	110
5.3.4	Oscillations transverses de la partie réfléchie	111
5.3.5	Quantification de l'absorption de quanta	111
5.4	Approche en physique classique	112
6	Sonde atomique localement monochromatique	117
6.1	Dispersion de vitesse locale d'un paquet atomique	117
6.1.1	Rappels sur le comportement de la dispersion de vitesse globale après découplage	118
6.1.2	Dispersion de vitesse locale $\Delta v(d)$	118
6.1.3	$\Delta v(d)$ pour un paquet d'onde sur une pente	120
6.1.4	Dispersion de vitesse locale d'un paquet d'onde après un découplage	125
6.2	Sonder une résonance en vitesse plus fine que la dispersion de vitesse globale	128

6.2.1	Système présentant une résonance fine : potentiel double pic	128
6.2.2	Diffusion d'un paquet d'onde découplé sur un potentiel double pic	130
7	Observation de la suppression des oscillations de Rabi pour des atomes en mouvement	133
7.1	Suppression des oscillations de Rabi pour des atomes en mouvement	133
7.1.1	Contexte du problème	133
7.1.2	Suppression des oscillations de Rabi	134
7.2	Condition d'observation de la suppression des oscillations de Rabi	135
7.2.1	Observation de la suppression de la composante $ \lambda_{-}\rangle$	136
7.2.2	Contraintes imposées par le paquet d'onde	136
7.2.3	Contraintes imposées par la résolution optique	138
7.2.4	Détection des oscillations de Rabi spatiales après un temps de vol	141
7.3	Choix de la transition : Faisceaux Raman pour la transition	142
7.4	Conclusion	144
	conclusion	145
A	Simulation d'ensemble de particules classiques	147
A.1	Échantillonnage de l'état initial selon une loi de probabilité	147
A.1.1	Méthode de réjection	147
A.1.2	Méthode Box-Muller	147
A.1.3	Test de la qualité du tirage gaussien	148
A.2	Algorithme d'évolution : méthode symplectique d'ordre 4	149
B	Diffusion d'onde plane sur un potentiel localisé	151
C	Simulation de Schrödinger par une méthode spectrale	155
C.1	Algorithme Split Step Fourier	155
C.1.1	Evolution élémentaire	155
C.1.2	Possibilités offertes par cet algorithme	155
C.2	En dimension un	156
C.2.1	Transformée de Fourier	156
C.2.2	Facteur d'évolution libre	156
C.2.3	Préparation de l'état initial	156
C.2.4	Contraintes numériques :	158
C.2.5	Tests 1D	158
C.3	En dimension deux	159
C.3.1	Transformée de Fourier	159
C.3.2	Facteur d'évolution libre	159
C.3.3	Contraintes numériques	159
C.3.4	Tests 2D	159
C.4	Algorithme Split Step Fourier en présence d'interactions	160

C.4.1	Dynamique de la fonction d'onde en présence d'interaction	160
C.4.2	Fonction d'onde de l'état fondamental par propagation en temps ima- ginaire	161
C.4.3	Tests de l'algorithme en présence d'interactions	161
C.5	Implémentation de bords absorbants	161
D	Représentations dans l'espace des phase	165
D.1	Wigner	165
D.2	Représentation de Husimi	165
E	Système d'unités des programmes développés	167
E.0.1	Unités du système	167
E.0.2	Passage d'un système à l'autre	167
	Bibliographie	169

Introduction

Avec la réalisation expérimentale de condensats de Bose-Einstein gazeux [1], il est désormais possible de manipuler une fonction d'onde peuplée par un nombre macroscopique d'atomes et de taille mésoscopique. Ces systèmes ont littéralement révolutionné la physique atomique et élargi son spectre d'applications. Les atomes lorsqu'ils sont extraits de manière cohérente d'un condensat [2, 3], forment une onde de matière. Ces ondes ont permis de renforcer le développement de l'optique atomique dont l'objet est de réaliser des outils pour leur manipulation e.g. la diffraction ou les interférences d'ondes de matière. Le groupe de David Guéry-Odelin se positionne sur cette thématique avec l'étude des ondes de matière en environnement guidé [4, 5, 6]. En septembre 2009, début de ma thèse, le groupe avait déménagé depuis Paris pour Toulouse. Nous avons remonté l'expérience sur laquelle j'ai eu la chance de travailler six mois. Ces mois m'ont permis de mieux apprécier les contraintes des expérimentateurs. Le groupe souhaitait alors étudier la diffusion d'ondes de matière guidées. Cette physique, où un système quantique très hors d'équilibre interagit avec un potentiel façonné, est riche et n'était encore que peu étudiée. L'équipe a rapidement ressenti le besoin de bénéficier d'une expertise numérique. C'est cette tâche qui m'a finalement été assignée. Il s'agissait d'analyser les résultats expérimentaux et de faire des études de faisabilité sur des projets d'expérience, c'est-à-dire de trouver les observables pertinentes et de vérifier la visibilité des phénomènes en jeu... Dans cette optique, j'ai commencé des études numériques, tout d'abord pour conforter les résultats expérimentaux [5] du dispositif de l'époque parisienne (2008-2009) sur l'influence des interactions inter-atomiques sur le peuplement des états transverses de l'onde de matière guidée. Ce manuscrit comporte principalement deux parties : la première est consacrée à la production contrôlée d'une onde de matière, chapitres (1) et (2), et la seconde à la diffusion d'onde de matière sur des potentiels façonnés, chapitres (3) à (7). Dans chacune des parties, nous décrivons les mécanismes à l'oeuvre pour ensuite proposer des moyens de contrôler l'onde de matière. Lors de l'utilisation des ondes de matière pour des expériences de diffusion ou pour sonder des potentiels, il était important de disposer de simulations numériques pour connaître la réponse attendue des systèmes sondés. Cette réponse dépend naturellement de la dispersion de vitesse des atomes incidents. Nous avons attaché beaucoup d'importance à cet aspect des sources atomiques et aux moyens d'en maîtriser la valeur. Nous aborderons ces problèmes dans les chapitres (1) et (2). Nous proposerons une méthode pour contrôler le flux atomique sur une large plage de temps. Nous montrerons, par ailleurs, que dans

certains cas, la seule dispersion de vitesse globale et instantanée du paquet atomique n'est pas le paramètre pertinent. C'est par exemple le cas de l'interaction d'une fonction d'onde avec un potentiel localisé. Nous proposerons pour cette situation une définition locale de la dispersion de vitesse dans le chapitre (6) qui permet de mieux cerner les phénomènes en jeu. Les premières expériences de diffusion du groupe ont été menées dès 2009 sur des potentiels optiques de taille transverse grande devant la fonction d'onde incidente. Elles ont révélé, dans une certaine gamme de paramètres, des comportements chaotiques [7, 8]. Ces comportements relèvent d'une dynamique classique, en dépit du fait que la fonction d'onde incidente soit dans un régime quantique pur. Pour exalter les comportements proprement quantiques, il est apparu nécessaire de façonner des potentiels à une échelle submicronique, c'est-à-dire d'une taille proche de celle de la longueur d'onde atomique :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \quad (1)$$

où h est la constante de Planck, m la masse et v la vitesse. Le groupe s'est alors naturellement tourné vers la diffusion d'onde de matière sur des réseaux optiques. Ces expériences ont été également motivées indépendamment par Luis Santos et Iacopo Carusotto [9, 10, 11]. Leurs travaux, publiés entre 1996 et 2000, mettent en exergue l'idée de réaliser une optique atomique "diélectrique" par analogie à l'optique diélectrique traditionnelle. Les motivations dans ces deux domaines sont toutefois radicalement différentes. En effet, l'équivalent d'un miroir métallique se réalise grâce à une barrière suffisamment haute et large en regard de l'énergie incidente des atomes. Dans ce cas 100% des atomes sont réfléchis. En revanche, pour disposer d'un potentiel présentant un comportement coupe ou passe-bande comme en optique diélectrique, une simple barrière ne peut suffire. Ce sont ces nouvelles possibilités qui ont motivé les travaux de recherche présentés dans le chapitre (3). Mon travail a consisté, en amont à tester les gammes de paramètres et ensuite à comparer les résultats des simulations aux résultats expérimentaux. Nous avons pu mettre en exergue le rôle crucial de l'enveloppe gaussienne du réseau et apporter des éclairages à l'aide de la théorie des bandes. Nous montrerons que les expériences de diffusion de condensat sur un réseau donne accès directement à la structure de bande à la différence des expériences où le condensat n'est pas en mouvement mais au repos dans le réseau. Nous montrerons qu'il est effectivement possible de réaliser un filtre passe-bande grâce à l'interaction avec ces réseaux. Ce chapitre complète la thèse de Charlotte Fabre [12] qui présente en détail la partie expérimentale. Cependant, ce filtre n'est ni très ajustable ni très sélectif quant à la classe de vitesse rejetée. Afin de réaliser un outil plus performant le groupe a mené une expérience sur un réseau modulé en amplitude. Grâce à la modulation, il est possible de faire transiter les classes de vitesse résonnantes sur d'autres bandes et par suite de les réfléchir. Pour ma part, j'ai mené une étude numérique sur ce sujet ainsi que sur les réseaux dépendant du temps de manière plus générale, les résultats font l'objet du chapitre (4). L'expérience ainsi qu'un modèle semi-classique seront détaillés dans la thèse de Pier-rick Cheiney. Ce questionnement sur la diffusion d'onde de matière sur un potentiel a été

élargi à d'autres situations que j'ai étudiées, en vue d'une implémentation éventuelle. Les expériences menées à ce jour étaient des expériences de diffusion interprétables à une dimension. Nous nous sommes attachés à regarder des situations pour lesquelles le potentiel de diffusion induit un couplage avec les modes transverses du guide. Le dispositif imaginé consiste à faire la diffusion sur un réseau incliné à 45 degrés par rapport à l'axe du guide et fait l'objet du chapitre (5). Plusieurs comportements ou effets physiques nouveaux ont été identifiés. Citons la présence de chaos qui se reflète dans les distributions de temps de sortie du potentiel, et qui reste un effet classique ici aussi, ou encore l'amplification de la réflexion de Bragg par le confinement. Ce dernier effet est en étroite analogie avec les "CIR Confinement-Induced Resonances [13] observées lors de collisions atomes-atomes en présence d'un confinement fort. De manière plus générale, les expériences de diffusion présentées dans ce manuscrit constituent des expériences de collisions contrôlées dont on peut entièrement caractériser les voies de sortie. Un autre aspect envisagé en dernier lieu est le couplage entre les degrés de liberté externe et interne de l'atome diffusé. Le chapitre (7) étudie la diffusion d'atomes à deux niveaux entrant dans une zone où règne un champ électromagnétique résonnant avec la transition atomique. Cette étude a été menée initialement par le groupe de Bilbao en 2003 [14]. J'ai pour ma part fait des études numériques de faisabilité expérimentale. J'ai fait le choix de présenter presque tous les résultats obtenus dans ma thèse. De fait, certains sujets méritent des approfondissements. Ils constitueront une partie de la thèse de François Damon. En appendice, sont résumées les différentes techniques numériques utilisées au cours de mes travaux de recherche.

Chapitre 1

Dispersion des vitesses d'un condensat dans un potentiel dépendant du temps

Introduction

Dans ce chapitre, après un rappel sur les condensats de Bose-Einstein en présence d'interactions et en particulier dans la limite de Thomas-Fermi, nous nous intéresserons à leur distribution des vitesses dans un piège harmonique dépendant du temps. Lors de la coupure brutale du potentiel de piégeage et après quelques millisecondes de propagation libre, le condensat présente une dispersion en vitesse supérieure à celle attendue pour un paquet d'onde initialement limité par la relation de Heisenberg. Ce supplément d'énergie cinétique est apporté par l'énergie d'interactions inter atomiques. Au moyen des lois d'échelle, nous déterminons l'équation qui traduit la dynamique de transfert entre l'énergie d'interaction et l'énergie cinétique. Si les lois d'échelle appliquées au profil de Thomas-Fermi s'avèrent décrire avec précision l'expansion d'un condensat dans l'espace réel ou les modes d'excitations du condensat, nous montrerons dans ce chapitre qu'une description au delà de Thomas-Fermi est indispensable pour rendre compte avec précision de la dynamique d'évolution dans l'espace des impulsions. Deux contributions à l'énergie cinétique doivent être prises en compte : celle associée aux variations temporelles de la phase et celle associée à la variation temporelle du module. A partir de l'équation qui régit la dynamique de l'énergie cinétique nous déduisons un temps caractéristique d'adiabaticité. Cette étude dynamique dépend de la dimensionnalité, nous traitons explicitement et exactement le cas des potentiels isotropes en dimension un, deux et trois, puis de manière approximative le cas anisotrope en dimension deux.

Ce modèle dynamique d'échange énergétique nous permet de modéliser la première phase de découplage d'un laser à atomes, à savoir l'ouverture du potentiel de piégeage du condensat. La suite naturelle de cette étude est de déterminer la méthode d'obtention de paquets d'onde les plus monocinétiques possible. Nous aborderons la question du façonnage

de l'espace des impulsions lors d'un découplage d'atomes hors de leur puits de confinement dans le chapitre suivant.

1.1 Condensat de Bose-Einstein sans interactions dans un potentiel harmonique dépendant du temps

Dans cette première partie, nous considérons le cas d'un condensat de Bose-Einstein à une dimension, sans interactions, dans un potentiel harmonique dépendant du temps par le biais de la pulsation $\omega(t)$. Cette partie, outre le fait de fixer les notations, nous permettra d'identifier par la suite les effets spécifiques des interactions.

1.1.1 Gaz dilués à l'équilibre et en l'absence d'interactions

Nous considérons que pour $t \leq 0$, les atomes sont soit à l'équilibre thermodynamique soit dans l'état fondamental du potentiel harmonique de pulsation ω_0 .

Cas classique : La théorie cinétique des gaz donne la densité de probabilité dans l'espace des phases pour un gaz à l'équilibre thermodynamique à la température T uniforme dans un potentiel harmonique de pulsation ω_0 . Les distributions de vitesses et de positions initiales classiques sont gaussiennes. La distribution de probabilité initiale s'écrit :

$$g_0(x_0, \Delta x_0, v_0, \Delta v_0) = \left(\frac{1}{2\pi\Delta x_0^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi\Delta v_0^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\Delta x_0^2}\right) \exp\left(-\frac{v_0^2}{2\Delta v_0^2}\right), \quad (1.1)$$

avec $\int g_0(x_0, \Delta x_0, v_0, \Delta v_0) dx_0 dv_0 = 1$. Les dispersions en position et en vitesse sont alors données en fonction de la température par :

$$\Delta x_{cl} = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_0^2}}, \quad \text{et} \quad \Delta v_{cl} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \frac{\Delta x_{cl}}{\omega_0}. \quad (1.2)$$

Il est à noter que :

$$\Delta x_{cl} \Delta p_{cl} = \frac{k_B T}{\omega_0}. \quad (1.3)$$

Cas quantique : Les dispersions en position et en vitesse de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_0 sont données par

$$\Delta x_q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}, \quad \text{et} \quad \Delta v_q = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2m}} = \frac{\Delta x_q}{\omega_0}. \quad (1.4)$$

avec

$$\Delta x_q \Delta p_q = \frac{\hbar}{2}. \quad (1.5)$$

Les distributions correspondantes sont gaussiennes. Toutefois, la distribution (1.2) implique que la distribution en position et en vitesse sont indépendantes. Ce n'est naturellement pas le cas dans le cadre de la mécanique quantique, car ces distributions sont les transformées de Fourier l'une de l'autre.

Pour simuler une situation classique équivalente (dans ces conditions initiales), à celle quantique, nous choisissons un gaz à une température effective égale à $T = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}$ grâce à l'identification :

$$\Delta x_{cl}\Delta p_{cl} = \Delta x_q\Delta p_q \quad (1.6)$$

1.1.2 Rappel sur la méthode des lois d'échelle : cas sans interactions

La méthode des lois d'échelle fournit la solution exacte de l'évolution d'un condensat dans un potentiel harmonique dépendant du temps. Nous utiliserons ici le formalisme hydrodynamique pour lequel on sépare le module et la phase de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x, t) = \sqrt{n(x, t)}e^{iS(x, t)} \text{ avec } v(x, t) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}, \quad (1.7)$$

où $n(x, t)$ est la densité d'atomes telle que $|\Psi(x, t)|^2 = n(x, t)$, et $v(x, t)$ le champ de vitesse. Les équations d'évolution de ces deux quantités s'obtiennent grâce à l'équation de Schrödinger [1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(nv) = 0 \quad \text{et} \quad m \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} - \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega(t)^2 x^2 \right]. \quad (1.8)$$

Dans ce système, l'évolution de la densité de présence est une dilatation ou une contraction de la densité initiale [2, 3]. Recherchons une solution sous la forme d'une fonction d'onde qui conserve sa forme initiale au cours du temps à un facteur d'échelle $\lambda(t)$ près :

$$n(x, t) = \frac{1}{\lambda(t)} n_0 \left(\frac{x}{\lambda(t)} \right) \quad \text{où} \quad n_0(x) = \left(\frac{1}{2\pi\Delta x_0^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{x^2}{2\Delta x_0^2} \right). \quad (1.9)$$

Le facteur $1/\lambda$ devant le n_0 résulte de la normalisation. En injectant cet ansatz dans les équations hydrodynamiques, nous obtenons finalement les deux équations suivantes :

$$v(x, t) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} x, \quad \text{et} \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}(t) = \frac{\omega_0^2}{\lambda(t)^3} - \lambda(t)\omega(t)^2. \quad (1.10)$$

La première équation nous donne l'évolution du champ de vitesse. La deuxième équation est une équation du type d'Ermakov qui s'intègre en fonction de la dynamique de la pulsation du potentiel. Lorsque le condensat est initialement à l'équilibre, les conditions initiales sont $\dot{\lambda}(0) = 0$ et $\lambda(0) = 1$. La fonction d'onde de l'ansatz prend la forme :

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\lambda^2(t)\Delta x_0^2} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{x^2}{4\lambda^2(t)\Delta x_0^2} \right) \exp \left(i \frac{\hbar}{m} \frac{\dot{\lambda}(t)}{2\lambda(t)} x^2 \right). \quad (1.11)$$

Il est intéressant de noter l'expression de la loi d'évolution de la dispersion en position, qui traduit simplement la dilatation ou la contraction de la fonction d'onde :

$$\Delta x(t) = \lambda(t)\Delta x_0. \quad (1.12)$$

1.1.3 Dynamique dans l'espace des vitesses d'un condensat en l'absence d'interaction

Dans ce paragraphe, nous donnons l'équation régissant l'évolution de la dispersion de vitesse d'un condensat sans interaction, dans un potentiel harmonique dont la pulsation est une fonction du temps. A cette fin, nous calculons la densité de présence dans l'espace des impulsions, à partir de la transformée de Fourier de la fonction d'onde (1.11) :

$$|\tilde{\Psi}(p, t)|^2 = \left(\frac{1}{2\pi \Delta p(t)^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{p^2}{2\Delta p(t)^2} \right), \quad (1.13)$$

où

$$\Delta p(t)^2 = \Delta p(0)^2 \left(\frac{1}{\lambda(t)^2} + \frac{\dot{\lambda}^2(t)}{\omega_0^2} \right). \quad (1.14)$$

Lorsque la transformation du puits est lente devant la période d'oscillation $2\pi/\omega_0$, le terme de droite contenant $\dot{\lambda}^2(t)$ est négligeable devant le premier terme. La transformation est dans ce cas adiabatique et l'on retrouve, en utilisant la relation (1.12), le fait que le paquet reste minimal durant la transformation : $\Delta p(t)\Delta x(t) = \Delta p(0)\Delta x(0) = \frac{\hbar}{2}$. Pour une ouverture adiabatique du potentiel confinant, la dispersion en position augmente, et par conséquent la dispersion de vitesse diminue. Dans le cas général, le deuxième terme proportionnel à la dérivée de λ s'ajoute. Ce terme provient de la dérivée de la phase de la fonction d'onde lors du calcul de l'énergie cinétique. Cette étude s'étend parfaitement aux dimensions deux et trois. En effet, dans le cas d'un condensat sans interaction dans un potentiel harmonique, il n'existe pas de terme de couplage entre les différents degrés de liberté. La dynamique selon une dimension est complètement indépendante de la dynamique selon les autres dimensions. Cette extension n'est pas possible pour un condensat en présence d'interactions inter-atomiques.

1.2 Rappel sur les condensats à l'équilibre en présence d'interactions inter-atomiques

Nous présentons dans cette partie les principaux résultats permettant de décrire les condensats de Bose-Einstein en présence d'interactions. Nous détaillerons en particulier, l'équation de Gross-Pitaevskii qui traite les interactions en champ moyen et l'approximation de Thomas-Fermi qui permet de décrire correctement les condensats dans la limite des grands nombres d'atomes. Enfin, nous présenterons une méthode de réduction de la dimensionnalité particulièrement adaptée à la propagation des ondes guidées. Les expressions sont données de manière explicite pour fixer les notations utiles dans la suite.

1.2.1 Equation de Gross-Pitaevskii

Une description réaliste des interactions inter-atomiques pour un condensat dilué consiste à introduire un potentiel de champ moyen caractérisé par une constante de couplage sca-

laire g . En modélisant les collisions par des diffusions en onde s [4], la constante de couplage s'exprime en fonction de la longueur de diffusion a : $g = 4\pi\hbar^2 a/m$. Dans le cas du rubidium 87, a est positive, ce qui indique que les interactions sont répulsives ($a \approx 5$ nm)[5]. L'évolution de la fonction d'onde d'un condensat soumis à potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$ quelconque est alors donnée par l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.15)$$

Les trois termes du membre de gauche correspondent respectivement à l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le terme non-linéaire à l'énergie d'interaction.

La solution stationnaire décrit le condensat à l'équilibre $\psi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{-i\mu t}{\hbar}\right)$ où μ est le potentiel chimique. Elle est normalisée à N_0 le nombre de particules dans le condensat. L'équation de Gross-Pitaevskii prend dans ce cas une forme indépendante du temps :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) + g|\Phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \Phi_0(\mathbf{r}) = \mu\Phi_0(\mathbf{r}). \quad (1.16)$$

1.2.2 Réduction de dimensionnalité

Nous présentons ici une méthode pour adapter l'équation de Gross-Pitaevskii à des dimensions inférieures [6, 7]. Dans le cas de la propagation d'une onde de matière guidée, la très forte anisotropie permet une description physique à une dimension. Nous détaillons également la réduction de l'équation de Gross-Pitaevskii à deux dimensions. En dimension deux, il devient possible d'étudier les phénomènes de couplage entre les différentes dimensions tout en allégeant considérablement les temps de calculs numériques par rapport au cas réel en dimension trois.

Dimension un

Le calcul correct en dimension un nécessite de prendre en compte le confinement dans les autres directions. Considérons un condensat dans un piège harmonique de pulsation ω_0 selon l'axe x , et confiné dans les deux autres directions par un piège harmonique de pulsation ω_\perp , telle que $\omega_\perp \gg \omega_0$. Le potentiel s'écrit :

$$V(\mathbf{r}_\perp, x) = \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x^2 + \omega_\perp^2 \mathbf{r}_\perp^2) = V_\perp(\mathbf{r}_\perp) + V_{1D}(x). \quad (1.17)$$

Le fort confinement transverse permet de faire l'hypothèse que le condensat est dans l'état fondamental transverse :

$$\Phi_\perp(\mathbf{r}_\perp) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\perp} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{4\sigma_\perp^2}\right), \quad (1.18)$$

où $\sigma_\perp = \sqrt{\hbar/2m\omega_\perp}$ et $\int |\Phi_\perp(\mathbf{r}_\perp)|^2 d^2r_\perp = 1$. Un traitement adiabatique de la dynamique transverse permet d'écrire la fonction d'onde sous la forme factorisée [6], $\psi(\mathbf{r}_\perp, x, t) =$

$\Phi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})\psi_{1D}(x, t)$. L'équation de Gross-Pitaevskii effective pour la fonction d'onde à une dimension $\psi_{1D}(x, t)$ s'écrit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{1D}(x) + g_1 |\psi_{1D}(x, t)|^2 \right] \psi_{1D}(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{1D}(x, t), \quad (1.19)$$

où la constante de couplage à une dimension g_1 , s'exprime en fonction de g et de la taille de la fonction d'onde transverse par :

$$g_1 = g \int |\Phi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})|^4 d\mathbf{r}_{\perp}^2 = \frac{g}{4\pi\sigma_{\perp}^2}. \quad (1.20)$$

L'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire (1.16) dont la fonction d'onde à une dimension $\Phi_{1D}(x)$ est solution s'écrit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{1D}(x) + g_1 |\Phi_{1D}(x)|^2 \right] \Phi_{1D}(x) = \mu_1 \Phi_{1D}(x), \quad (1.21)$$

où le potentiel chimique à une dimension est donné par :

$$\mu_1 = \mu - \int \Phi_{\perp}^*(\mathbf{r}_{\perp}) \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_{\perp} + V(r_{\perp}) \right] \Phi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) d\mathbf{r}_{\perp}^2 = \mu - \hbar\omega_{\perp}. \quad (1.22)$$

Le potentiel chimique à une dimension est le potentiel chimique diminué de l'énergie de l'état fondamental transverse.

Dimension deux

La réduction en dimension deux permet de conserver la possibilité d'étudier un système anisotrope. Dans le même esprit que le paragraphe précédent, nous considérons un condensat dans un piège harmonique selon les axes x et y et confiné selon l'axe z par un piège harmonique de pulsation ω_z , telle que $\omega_z \gg \omega_x, \omega_y$, le potentiel s'écrit :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) = V_z(z) + V_{2D}(x, y). \quad (1.23)$$

Le fondamental transverse s'écrit :

$$\Phi_z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sigma_z^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\sigma_z^2}\right), \quad (1.24)$$

où $\sigma_z = \sqrt{\hbar/2m\omega_z}$ et $\int |\Phi_z(z)|^2 dz = 1$. L'équation de Gross-Pitaevskii effective de la fonction d'onde $\psi_{2D}(x, y, t)$ est :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{2D}(x, y) + g_2 |\psi_{2D}(x, y, t)|^2 \right] \psi_{2D}(x, y, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2D}(x, y, t), \quad (1.25)$$

où la constante de couplage g_2 s'exprime en fonction de g et de la taille de la fonction d'onde transverse :

$$g_2 = g \int |\Phi_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})|^4 d\mathbf{r}_{\perp} = \frac{g}{2\sqrt{\pi}\sigma_{\perp}}. \quad (1.26)$$

L'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire (1.16) dont la fonction d'onde à deux dimensions $\Psi_{2D}(x, y)$ est solution s'écrit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{2D}(x, y) + g_2|\Phi_{2D}(x, y)|^2 \right] \Phi_{2D}(x, y) = \mu_2 \Phi_{2D}(x, y). \quad (1.27)$$

où le potentiel chimique à deux dimensions est donné par :

$$\mu_2 = \mu - \int \Phi_{\perp}^*(r_{\perp}) \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta_{\perp} + V(r_{\perp}) \right] \Phi_{\perp}(r_{\perp}) dr_{\perp} = \mu - \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2}. \quad (1.28)$$

1.2.3 Approximation de Thomas-Fermi

Nous détaillons dans cette partie l'approximation de Thomas-Fermi qui consiste à négliger le terme d'énergie cinétique dans (1.16). Pour évaluer le domaine de validité de cette approximation, nous calculons les différents termes d'énergie, d'un condensat dans un potentiel harmonique V isotrope de pulsation ω_0 et de longueur caractéristique $a_{\text{oh}} = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$, au moyen d'un ansatz gaussien Φ_w , de taille caractéristique $\sigma = wa_{\text{oh}}$, où w est un paramètre sans dimension. Les différentes énergies sont :

– l'énergie cinétique :

$$E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \int d\mathbf{r} |\vec{\nabla} \Phi_w(\mathbf{r})|^2, \quad (1.29)$$

– l'énergie potentielle :

$$E_{\text{pot}} = \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}) |\Phi_w(\mathbf{r})|^2, \quad (1.30)$$

– et l'énergie d'interaction :

$$E_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} |\Phi_w(\mathbf{r})|^4. \quad (1.31)$$

Le calcul se décline différemment selon la dimension du système.

Approximation de Thomas-Fermi en dimension 3 isotrope

En dimension trois, l'ansatz gaussien s'écrit :

$$\Phi_w(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{N_0}}{(2\pi)^{3/4} w^{3/2} a_{\text{oh}}^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{4w^2 a_{\text{oh}}^2}\right). \quad (1.32)$$

Les différentes énergies s'écrivent :

$$\frac{E_{\text{cin}}}{N_0 \hbar \omega_0} = \frac{3}{8} \frac{1}{w^2}, \quad \frac{E_{\text{pot}}}{N_0 \hbar \omega_0} = \frac{3}{2} w^2, \quad \text{et} \quad \frac{E_{\text{int}}}{N_0 \hbar \omega_0} = \frac{1}{16\pi^{3/2}} \frac{\chi_3}{w^3}, \quad (1.33)$$

où le paramètre sans dimension χ_3 détermine la force des interactions :

$$\chi_3 = \frac{g_3 N_0}{\hbar \omega_0 a_{\text{oh}}^3} = \frac{a N_0}{a_{\text{oh}}}. \quad (1.34)$$

En l'absence d'interaction ($\chi_3 = 0$), l'énergie totale, égale à la somme de l'énergie cinétique et potentielle, est minimale pour $w = 1/\sqrt{2}$. Nous retrouvons l'état fondamental d'un oscillateur harmonique. En présence d'interactions, χ_3 donne l'ordre de grandeur (pour $w = 1$) de l'énergie d'interaction comparée à l'énergie cinétique et potentielle. Dans la limite $\chi_3 \ll 1$, les interactions peuvent être ignorées pour déterminer l'état fondamental. Dans la limite $\chi_3 \gg 1$, le terme d'énergie d'interactions modifie considérablement la taille caractéristique w de l'état fondamental. L'approximation de Thomas-Fermi consiste pour cette dernière limite à négliger le terme d'énergie cinétique devant le terme d'interactions. Dans ce régime, nous déduisons immédiatement de l'équation (1.16) la fonction d'onde du condensat :

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\mu_3 - V(\mathbf{r})}{g_3}}, \quad (1.35)$$

qui dans un potentiel harmonique isotrope de pulsation ω_0 , prend la forme particulière d'une parabole inversée :

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{15N_0}{8\pi R^3}} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{r}^2}{R^2}}, \quad (1.36)$$

de rayon caractéristique :

$$R = \sqrt{\frac{2\mu_3}{m\omega_0^2}} = \left(\frac{15g_3 N_0}{4\pi m\omega_0^2} \right)^{1/5}. \quad (1.37)$$

Le cas anisotrope en dimension 2 qui suit contient le cas isotrope.

Approximation de Thomas-Fermi en dimension 2 anisotrope

Considérons un condensat dans un piège harmonique anisotrope :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2. \quad (1.38)$$

Pour évaluer le domaine de validité de l'approximation de Thomas-Fermi, on évalue grâce à l'ansatz gaussien

$$\Phi_w(x, y) = \frac{\sqrt{N_0}}{2^{1/2}\pi^{1/2}(w_x a_{\text{oh}x})^{1/2}(w_y a_{\text{oh}y})^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4w_x^2 a_{\text{oh}x}^2} - \frac{y^2}{4w_y^2 a_{\text{oh}y}^2}\right), \quad (1.39)$$

les différentes énergies :

$$E_{\text{cin}} = \frac{N_0}{8} \left(\frac{\hbar\omega_x}{w_x^2} + \frac{\hbar\omega_y}{w_y^2} \right), \quad E_{\text{pot}} = \frac{N_0}{2} (\hbar\omega_x w_x^2 + \hbar\omega_y w_y^2), \quad \text{et} \quad E_{\text{int}} = \frac{N_0 \hbar \sqrt{\omega_x \omega_y}}{16\pi} \frac{\chi_{2,\text{a}}}{w_x w_y}, \quad (1.40)$$

où le paramètre sans dimension $\chi_{2,a}$ détermine la force des interactions dans le cas anisotrope en dimension deux :

$$\chi_{2,a} = \frac{g_2 N_0}{\hbar \sqrt{\omega_x \omega_y} a_{\text{oh}x} a_{\text{oh}y}}. \quad (1.41)$$

Dans la limite de Thomas-Fermi, la fonction d'onde du condensat s'écrit :

$$\Phi_{2D}(x, y) = \sqrt{\frac{2N_0}{\pi R_x R_y}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}} \quad (1.42)$$

où les rayons de Thomas-Fermi sont :

$$R_x = \left(\frac{2\mu_2}{m\omega_x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4g_2 N_0 \omega_y}{m\omega_x^3 \pi} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad R_y = \left(\frac{2\mu_2}{m\omega_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4g_2 N_0 \omega_x}{m\omega_y^3 \pi} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (1.43)$$

et la normalisation s'écrit :

$$g_2 N_0 = \frac{(\mu_2)^2 \pi}{m\omega_x \omega_y}. \quad (1.44)$$

Approximation de Thomas-Fermi en dimension 1

En dimension un, l'ansatz gaussien s'écrit :

$$\Phi_w(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{N_0}}{2^{1/4} \pi^{1/4} (w a_{\text{oh}})^{1/2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{r}^2}{4w^2 a_{\text{oh}}^2} \right). \quad (1.45)$$

Les différentes énergies s'écrivent :

$$\frac{E_{\text{cin}}}{N_0 \hbar \omega_0} = \frac{1}{8} \frac{1}{w^2}, \quad \frac{E_{\text{pot}}}{N_0 \hbar \omega_0} = \frac{w^2}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{E_{\text{int}}}{N_0 \hbar \omega_0} = \frac{1}{4\pi^{1/2}} \frac{\chi_1}{w}. \quad (1.46)$$

où le paramètre sans dimension χ_1 détermine la force des interactions en dimension un :

$$\chi_1 = \frac{g_1 N_0}{\hbar \omega_0 a_{\text{oh}}}. \quad (1.47)$$

Dans le régime de Thomas-Fermi ($\chi_1 \gg 1$), la fonction d'onde s'écrit :

$$\Phi_{1D}(x) = \sqrt{\frac{3N_0}{4R}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \quad (1.48)$$

avec :

$$R = \sqrt{\frac{2\mu_1}{m\omega_0^2}} = \left(\frac{3g_1 N_0}{2m\omega_0^2} \right)^{1/3}. \quad (1.49)$$

D'après notre étude, l'approximation de Thomas-Fermi est valable lorsque ($\chi \gg 1$), soit pour un grand nombre d'atomes. Sur les bords du profil de Thomas-Fermi, l'énergie cinétique diverge ce qui rend la forme en parabole inversée du profil de densité caduque (voir figure 1.1). L'approximation de Thomas-Fermi permet en définitive une description précise de la fonction d'onde dans l'espace réel, et permet le calcul de l'énergie potentielle

et d'interaction. Cependant, elle n'est pas appropriée pour le calcul de l'énergie cinétique (1.29) à cause de la divergence artificielle au niveau du rayon de Thomas-Fermi. En effet, l'énergie cinétique fait intervenir le gradient de la fonction d'onde.

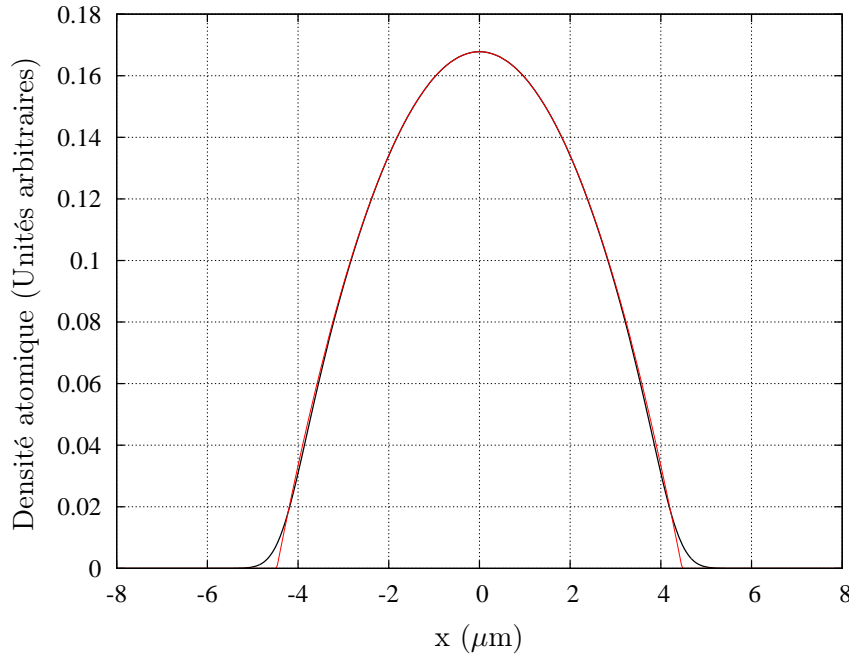


FIGURE 1.1 – Densité de présence d'un condensat à une dimension ($g_1 N_0 = 100 \hbar^3/2m^{-1/2}s^{1/2}$, $R = 4.5 \mu\text{m}$) dans un potentiel harmonique de fréquence 150 Hz. En noir : solution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii ; en ligne continue l'approximation de Thomas-Fermi. Sur les bords du profil ($x \gtrsim R$) le nuage est très dilué et l'énergie cinétique ne peut être négligée devant l'énergie d'interaction, l'approximation de Thomas-Fermi n'est plus valable ; la densité de probabilité réelle présente "des ailes".

1.2.4 Énergie cinétique d'un condensat dans le régime de Thomas-Fermi

Dans cette partie, nous reprenons une méthode de calcul de l'énergie cinétique d'un condensat dans le régime de Thomas-Fermi développée par Franco Dalfovo et ses collaborateurs [8]. Cette méthode prend en compte les écarts à la parabole inversée au bord du condensat. Nous rappelons ici ce résultat et l'étendons aux dimensions un et deux. Nous obtenons ainsi une expression de l'énergie cinétique d'un condensat à l'équilibre en fonction du rayon de Thomas-Fermi, du nombre d'atomes et de la constante de couplage. La méthode développée par Franco Dalfovo consiste à traiter séparément, la partie centrale du condensat où l'approximation de Thomas-Fermi est valide, et les bords, dans l'intégrale qui intervient dans le calcul de l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique d'un condensat en dimension trois, de rayon R , dans un potentiel harmonique de longueur caractéristique a_{oh} s'écrit selon ce calcul [8] :

$$E_{\text{cin}} = \frac{5}{2} \frac{\hbar^2}{mR^2} \ln \left(\frac{R}{1.3a_{\text{oh}}} \right). \quad (1.50)$$

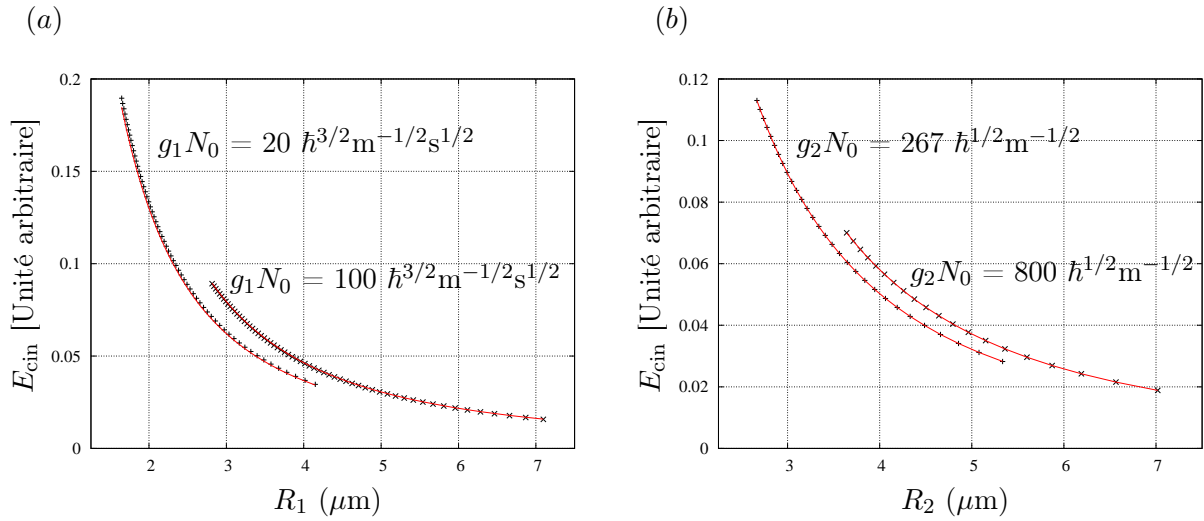


FIGURE 1.2 – Énergie cinétique d'un condensat dans le régime de Thomas-Fermi en fonction du rayon pour différents paramètres des interactions, en rouge l'ajustement de la formule (1.51); (a) en dimension un, (b) en dimension deux.

La dépendance explicite en la force des interactions gN_0 est contenue dans le rayon R . En supposant que cette forme ne dépend pas de la dimension, nous pouvons proposer comme ansatz pour l'énergie cinétique E_{cin} d'un condensat en dimension d , de rayon R_d :

$$E_{\text{cin}}(R_d) = K_d(R_d) = \frac{A_d N_0 \hbar^2}{m R_d^2} \ln \left[(R_d)^{(2-d)/4} \left(\frac{m g_d N_0}{\hbar^2} \right)^{1/4} B_d \right]. \quad (1.51)$$

où les coefficients sans dimension A_d , B_d sont déterminées en dimension trois ($A_3 = 2.5$, $B_3 = 0.80$) à partir de la formule (1.50).

Nous avons généralisé cette méthode aux dimensions un et deux. Pour ce faire, nous déterminons numériquement l'état fondamental Φ_0 , pour différents rayons R et forces des interactions ($g_d N_0$), par une méthode de convergence en temps imaginaire (voir appendice), et nous en déduisons l'énergie cinétique à partir de la transformée de Fourier $\widetilde{\Phi}_0$:

$$E_{\text{cin}}(R_d, g_d N_0) = \frac{\hbar^2}{2m} \int \mathbf{k}^2 |\widetilde{\Phi}_0(\mathbf{k}; R_d, g_d N_0)|^2 d\mathbf{k}. \quad (1.52)$$

Un ajustement de la formule (1.51), voir figure (1.2), permet de déterminer les coefficients numériques ($A_1 = 0.5$, $A_2 = 1.17$, $B_1 = 1.52$, $B_2 = 1.45$).

1.3 Analyse de la dynamique d'un BEC dans la limite de Thomas-Fermi dans l'espace des impulsions

Nous présentons ici une extension de la méthode précédente qui permet de traiter la dynamique dans l'espace des impulsions d'un condensat dans un potentiel harmonique dont la pulsation dépend du temps. L'énergie cinétique comprend deux termes : le premier

"statique" lié à l'énergie cinétique du condensat dans son état fondamental qui découle du gradient du module et l'autre "dynamique" lié aux variations du potentiel qui découle du gradient de la phase. Comme nous allons le voir, le terme dynamique est prépondérant lors de variations rapides et s'annule lors de processus adiabatiques. Dans un premier temps, nous rappelons la méthode des lois d'échelle à 3D qui nous permet d'appréhender la dynamique du condensat. Avant de présenter la méthode générale, nous montrons que la conservation de l'énergie donne l'asymptote de l'énergie cinétique dans le cas d'une ouverture brutale du potentiel, et que l'application du théorème de Ehrenfest au profil de Thomas-Fermi du condensat redonne exactement le terme dynamique.

1.3.1 Equations d'évolution de la fonction d'onde

Rappel sur la méthode des lois d'échelle en présence d'interactions

La méthode des lois d'échelle, déduite de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps, permet de décrire la dynamique d'un condensat dans un piège harmonique dépendant du temps de pulsation $\omega(t)$. On peut montrer que, dans l'approximation de Thomas-Fermi, la densité atomique est soumise à une invariance d'échelle [2, 3] :

$$n(r_i, t) = \frac{1}{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} n_0 \left(\frac{r_i}{\lambda_i(t)}, t \right) \quad (1.53)$$

où les $\lambda_i(t)$ sont les paramètres d'échelle, ils sont sans dimension.

Rappel des équations hydrodynamiques

Les équations hydrodynamiques en présence d'interactions s'écrivent

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) = 0 \quad \text{et} \quad m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} m \omega(t)^2 \mathbf{r}^2 - gn \right]. \quad (1.54)$$

La première équation est l'équation de continuité qui nous donne l'expression du champ de vitesse :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \frac{\dot{\lambda}_i(t)}{\lambda_i(t)} \mathbf{r}_i. \quad (1.55)$$

La deuxième est l'équation d'Euler. Dans l'approximation de Thomas-Fermi, nous pouvons supprimer dans cette deuxième équation le terme de pression quantique, on en déduit alors la loi d'évolution des paramètres d'échelle $\lambda_i(t)$:

$$\frac{d^2 \lambda_i(t)}{dt^2} = \frac{\omega_i(0)^2}{\lambda_i(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} - \omega_i^2(t) \lambda_i(t), \quad (1.56)$$

avec les conditions initiales $\lambda_i(0) = 1$ et $\dot{\lambda}_i(0) = 0$. Les rayons de Thomas-Fermi à l'instant t sont donnés par : $R_i(t) = \lambda_i(t) R_i(0)$. Ce résultat fournit une généralisation de l'approximation de Thomas-Fermi pour des problèmes dépendant du temps. Toute la dynamique de la fonction d'onde macroscopique est ici contenue dans l'évolution des paramètres d'échelle.

En particulier, lors d'une ouverture du puits, le profil de densité du condensat reste une parabole inversée, en dépit du fait que le terme d'énergie d'interaction diminue et que l'on n'est plus nécessairement dans le régime de Thomas-Fermi. Il est aussi possible de retrouver les équations en loi d'échelle grâce à un ansatz gaussien pour la fonction d'onde, dans ce cas l'équation d'évolution du paramètre d'échelle dépend explicitement du terme d'interaction [9].

Application au cas isotrope

Dans le cas isotrope :

$$\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2} = \frac{\omega(0)^2}{\lambda(t)^{d+1}} - \omega^2(t)\lambda(t), \quad (1.57)$$

où d est la dimension du système.

1.3.2 Ouverture brutale, conservation de l'énergie

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'asymptote de l'énergie cinétique lors d'un processus d'ouverture brutale du potentiel confinant. Avant la coupure, le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi, l'énergie cinétique initiale est négligeable. La relation du viriel [4] en dimension d s'écrit :

$$2E_{\text{cin}}^0 - 2E_{\text{pot}}^0 + dE_{\text{int}}^0 = 0. \quad (1.58)$$

L'équation donnée par intégration directe sur l'espace de l'équation de Gross-Pitaevskii (1.16) en dimension d donne :

$$(E_{\text{cin}}^0 + E_{\text{pot}}^0 + 2E_{\text{int}}^0) = \mu_d N_0. \quad (1.59)$$

En combinant ces deux équation on détermine l'énergie initiale d'interaction :

$$E_{\text{int}}^0 = \frac{2\mu_d N_0}{d+4}. \quad (1.60)$$

Après coupure du potentiel de confinement harmonique, le paquet d'ondes s'étale, la densité atomique diminue et l'énergie d'interaction est convertie en énergie cinétique. L'asymptote de l'énergie cinétique est alors donnée par l'énergie d'interaction initiale :

$$E_{\text{cin}}^\infty = E_{\text{int}}^0 = \frac{2\mu_d N_0}{d+4}. \quad (1.61)$$

La dispersion en vitesse à temps long est donc dictée dans ce cas uniquement par la force des interactions.

1.3.3 Dynamique de l'énergie cinétique par integration du théorème de Ehrenfest

Dans cette partie, nous montrons qu'en intégrant la loi de variation de $\langle p^2 \rangle$ donnée par le théorème de Ehrenfest, nous obtenons la loi de variation de l'énergie cinétique d'un condensat dans un potentiel harmonique dépendant du temps. Sans perte de généralité, nous détaillons la méthode en dimension un. Le profil initial du condensat est donné par la parabole inversée de l'approximation de Thomas-Fermi, la fonction d'onde se déduit de la méthode des lois d'échelle. L'intérêt de cette méthode est que seul le profil de Thomas-Fermi est utilisé, évitant ainsi la divergence artificielle de sa dérivée. Le théorème de Ehrenfest appliqué à l'hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2 + g_1 N_0 |\Psi(x, t)|^2, \quad (1.62)$$

s'écrit

$$\frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[p^2, \frac{1}{2}m\omega^2(t)x^2 + g_1 N_0 |\Psi(x, t)|^2 \right] \right\rangle = \frac{4}{5}m\mu_1 N_0 \frac{\dot{\lambda}(t)\ddot{\lambda}(t)}{\omega_0^2}. \quad (1.63)$$

En intégrant, nous trouvons la dynamique de transfert entre l'énergie cinétique et d'interaction :

$$\frac{\langle p^2 \rangle(t)}{2m} = \frac{\langle p^2 \rangle_0}{2m} + \frac{1}{5}\mu_1 N_0 \frac{\dot{\lambda}^2(t)}{\omega_0^2}, \quad (1.64)$$

dictée par la loi d'évolution du paramètre d'échelle $\lambda(t)$. L'énergie cinétique du condensat est nécessairement supérieure à sa valeur initiale, quelque soit l'évolution du paramètre d'échelle. Cependant, ce résultat n'est pas général. Il ne prend en effet en compte que les variations apportées par l'énergie d'interaction et potentielle. Pour justifier qualitativement cette dernière assertion, considérons une ouverture adiabatique du potentiel piégeant, le condensat reste à tout instant dans le fondamental du puits, le rayon de Thomas-Fermi augmente et l'énergie cinétique (1.51) décroît, ce qui est en contradiction manifeste avec (1.64). La méthode d'Ehrenfest s'avère valable lorsque le terme en $\dot{\lambda}$ est prépondérant devant l'énergie cinétique du fondamental. Une correction intuitive à ce modèle consiste à remplacer dans l'équation (1.64) l'énergie cinétique initiale $\langle p^2 \rangle_0/2m$ par l'énergie cinétique de l'état fondamental du puits à cet instant. Nous justifions ci-après cette proposition.

1.3.4 Ouverture générale

Nous détaillons dans cette partie, une méthode générale qui met en évidence les deux contributions à l'énergie cinétique d'un condensat dans un potentiel harmonique dépendant du temps : le terme de "phase" lié à une dynamique identique à celle donnée par l'intégration du théorème de Ehrenfest et un terme de "module" égal à l'énergie cinétique du condensat dans l'état fondamental. Dans un premier temps, nous considérons un paquet d'ondes $\Psi(x, t)$ à une dimension. La dépendance temporelle de la fonction d'onde est donnée par la méthode des lois d'échelle.

1.3.5 Espace à une dimension

Le calcul de l'énergie cinétique (1.29) requiert la dérivée spatiale de la fonction d'onde. Le module $\rho(x, t)$ et la phase $S(x, t)$ dépendent de la position. La dérivée spatiale s'écrit :

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x, t) e^{iS(x, t)} \right) = \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + i\rho(x, t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right) e^{iS(x, t)}. \quad (1.65)$$

Les deux termes du module carré $|\partial \Psi(x, t)/\partial x|^2$ sont calculés séparément. La contribution à l'énergie cinétique du terme $\partial \rho(x, t)/\partial x$ nécessite d'inclure les ailes de la fonction d'onde, et est exactement égale à l'énergie cinétique du condensat K_1 (1.51) dans l'état fondamental de rayon $\lambda(t)R^0$. La contribution du second terme $\rho(x, t) \partial S(x, t)/\partial x$, n'impliquant pas de dérivée spatiale du profil, se calcule sans difficultés et donne le terme traduisant la dynamique. Le résultat fait apparaître naturellement les deux contributions à l'énergie cinétique :

$$E_{\text{cin}}(t) = K_1(\lambda(t)R^0) + \frac{1}{5}\mu_1 N_0 \frac{\dot{\lambda}^2(t)}{\omega_0^2}. \quad (1.66)$$

Le temps caractéristique d'évolution du paramètre d'échelle permet de distinguer différents régimes. La figure (1.3) représente l'énergie cinétique d'un condensat lors de l'ouverture du potentiel confinant : (i) dans la limite adiabatique, la dérivée temporelle tend vers zéro, l'énergie cinétique est celle du condensat à l'équilibre dans le puits (cas $\tau = 200$ ms) sur la figure (1.3) ; (ii) dans le cas d'un rapide changement du confinement comme une coupure brutale du potentiel piège, le second terme domine (cas $\tau = 1$ ms) sur la figure (1.3). Enfin, pour des temps caractéristiques intermédiaires (cas $\tau = 20$ ms) sur la figure (1.3) les deux termes ont des contributions semblables, faisant apparaître des oscillations.

1.3.6 Généralisation dans un espace isotrope

La procédure peut être directement généralisée aux dimensions deux et trois, pour les potentiels isopropes. En dimension d , l'énergie cinétique selon l'axe x s'écrit :

$$\frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} = \frac{K_d[\lambda(t)R_0]}{d} + \frac{C_d \mu_d^0 N_0}{\omega_0^2} \dot{\lambda}^2(t), \quad (1.67)$$

où $C_d = 1/(d + 4)$. Le terme dynamique est identique à celui obtenu au moyen de l'intégration du théorème de Ehrenfest (1.64). La figure (1.4) représente l'énergie cinétique selon l'axe x au cours du temps lors de l'ouverture linéaire d'un potentiel harmonique en dimension deux. L'accord est excellent entre les simulations numériques par méthode Split-Fourier (voir appendice) et la formule (1.67).

1.3.7 Transfert de l'énergie d'interactions dans le cas d'une coupure brutale du potentiel confinant

Lorsque le potentiel confinant d'un condensat au repos en présence d'interactions est brusquement éteint, le condensat s'étale et la densité atomique diminue. L'énergie d'inter-

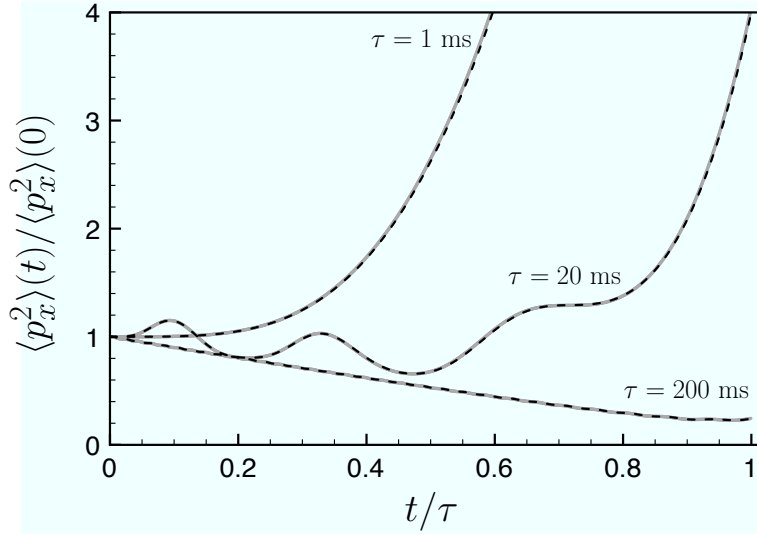


FIGURE 1.3 – Dynamique de l'énergie cinétique d'un condensat en présence d'interactions ($g_1 N_0 = 60 \hbar^{3/2} m^{-1/2} s^{1/2}$) dans un potentiel harmonique, de pulsation initiale $\omega_0 = 2\pi \times 150$ Hz et dont la pulsation est diminuée linéairement en fonction du temps : $\omega(t) = 4\omega_0(1 - t/\tau)/5 + \omega_0/5$. En trait plein : simulations numériques, ligne pointillée : formule (1.66). Un excellent accord est observé pour différentes valeurs de $\tau = 1, 20, 200$ ms.

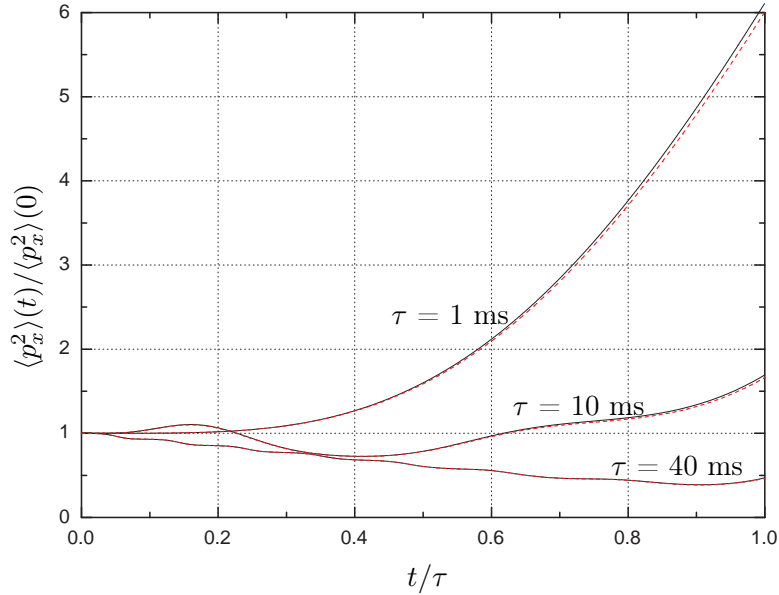


FIGURE 1.4 – Dynamique de l'énergie cinétique d'un condensat à deux dimensions en présence d'interactions ($g_2 N_0 = 267 \hbar^{1/2} m^{-1/2}$) dans un potentiel harmonique isotrope, de pulsation initiale $\omega_0 = 2\pi \times 150$ Hz, dont la pulsation est diminuée linéairement : $\omega(t) = 4\omega_0(1 - t/\tau)/5 + \omega_0/5$. En trait plein noir : simulations numériques, ligne pointillée rouge : formule (1.67). Un excellent accord est observé pour différentes valeurs de $\tau = 1, 10, 40$ ms.

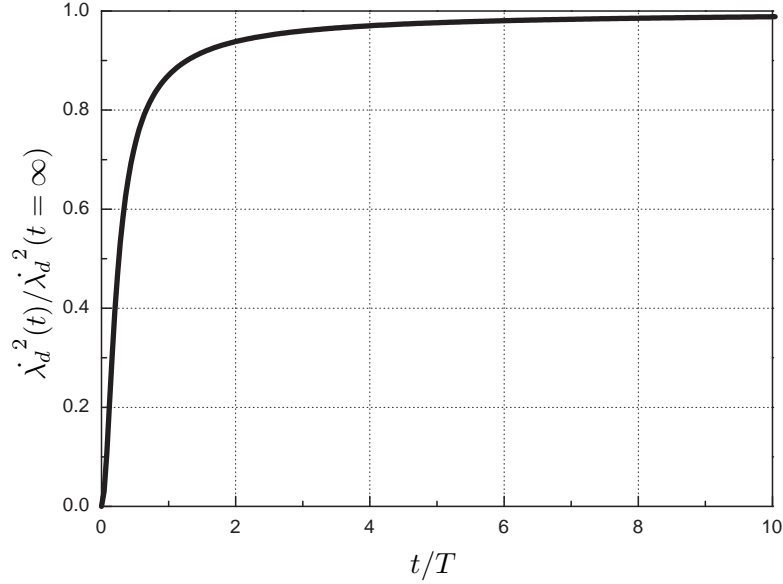


FIGURE 1.5 – *Taux de conversion de l'énergie d'interactions en énergie cinétique au cours du temps dans le cas d'une coupure brutale du potentiel confinant. L'échelle de temps caractéristique de la dynamique ne dépend pas de la force des interactions mais seulement de la période d'oscillation dans le puits initial.*

action se convertit en énergie cinétique. Nous considérons un potentiel initial harmonique isotrope de pulsation ω_0 . La loi d'évolution du paramètre d'échelle λ_d en dimension d obéit dans ce cas à l'équation d'Ermakov (1.56 où $\omega(t) = 0$) :

$$\frac{d^2 \lambda_d(t)}{dt^2} = \frac{\omega_0^2}{(\lambda_d(t))^{d+1}}. \quad (1.68)$$

Initialement le condensat est au repos : $\lambda_d(0) = 1$ et $\dot{\lambda}_d(0) = 0$. L'échelle de temps caractérisant le transfert de l'énergie d'interactions en énergie cinétique est donnée par le temps caractéristique nécessaire à la dérivée du facteur d'échelle $\dot{\lambda}$ pour atteindre sa valeur asymptotique (voir formule 1.67). Ce temps est de l'ordre de quelques périodes d'oscillation du potentiel initial $T = 2\pi/\omega_0$ (voir figure 6.21). Le résultat remarquable est que ce temps ne dépend pas de la force des interactions mais seulement du potentiel initial.

La valeur asymptotique de $\dot{\lambda}_d = \sqrt{2/d}\omega_0$ permet de déterminer la valeur asymptotique de l'énergie cinétique après coupure brutale du confinement, identique à celle obtenue par conservation de l'énergie (formule 1.61) :

$$E_{\text{cin}}^\infty = d \frac{C_d \mu_d^0 N_0}{\omega_0^2} \dot{\lambda}_d^2(t = \infty) = \frac{2\mu_d N_0}{d+4}. \quad (1.69)$$

1.4 Méthode pour court-circuiter l'adiabaticité

Un processus adiabatique est un processus lent devant toutes les échelles de temps caractéristiques du problème.

1.4.1 Échelle de temps de l'*adiabaticité*

Pour un condensat sans interactions dans un potentiel harmonique dépendant du temps, il y a *adiabaticité* si par exemple la variation de la pulsation sur une période d'oscillation reste petite, soit plus quantitativement : $\frac{d\omega}{dt} \ll \omega^2$. Pour un condensat en présence d'interactions (régime de Thomas-Fermi), il y a *adiabaticité* si le terme dynamique d'énergie cinétique de l'équation (1.67) reste toujours négligeable au cours de la transformation devant l'énergie cinétique de l'état fondamental. Sur la figure (1.6) est représenté le rapport du terme *dynamique* sur le terme *intrinsèque* en fonction de τ durée caractéristique de la transformation d'un potentiel harmonique de pulsation initiale ω_0 et de la force des interactions en dimension un. En noir la ligne d'égalité des deux termes qui représente la frontière entre les domaines *non-adiabatique* et *adiabatique*. La ligne en pointillés blanc représente la frontière dans le cas sans interactions. La signature d'une ouverture non-adiabatique induit, dans le cas d'une coupure du potentiel confinant, un surplus d'énergie cinétique qui se traduit par une importante dispersion en vitesse.

1.4.2 "Shortcut to adiabaticity" dans l'espace des vitesses en dimension un

Une méthode qui permet de court-circuiter l'*adiabaticité*, c'est-à-dire une transformation qui conserve les mêmes populations dans les confinements initial et final, sans aucune contrainte sur ces populations au cours de la transformation, a été développée dans le cadre d'une collaboration entre le groupe de recherche de Bilbao dirigé par G. Muga et notre équipe [10]. Elle s'appuie sur la méthode des lois d'échelle et propose de court-circuiter l'*adiabaticité* en imposant à la transformation seulement des conditions aux limites (initiale et finale) sur le paramètre d'échelle. Ce sont ces conditions aux limites qui assurent que la fonction d'onde est, après la transformation, dans l'état fondamental. Dans cette partie, nous proposons une application de cette méthode au cas où les interactions sont prises en compte par un terme de champ moyen, et nous observons le caractère adiabatique dans l'espace des vitesses. L'objectif est de trouver pour une modification du potentiel harmonique donnée (pulsation initiale ω_0 et finale ω_f et durée τ) une loi telle qu'il n'y ait aucun transfert d'énergie d'interaction en énergie cinétique entre l'état initial et l'état final. Au regard de l'équations (1.66), il suffit d'annuler $\dot{\lambda}(\tau)$. D'après l'équation d'évolution du paramètre d'échelle, ce dernier terme reste nul si $\ddot{\lambda}(\tau)$ est nul aussi. Le paramètre d'échelle $\lambda(t)$ doit vérifier six conditions :

$$\dot{\lambda}(\tau) = 0 \quad \ddot{\lambda}(\tau) = 0, \quad \lambda(0) = 1, \quad \dot{\lambda}(0) = 0, \quad \ddot{\lambda}(0) = 0, \quad \text{et} \quad \lambda(\tau) = \left(\frac{\omega_0}{\omega_f} \right)^{2/3}. \quad (1.70)$$

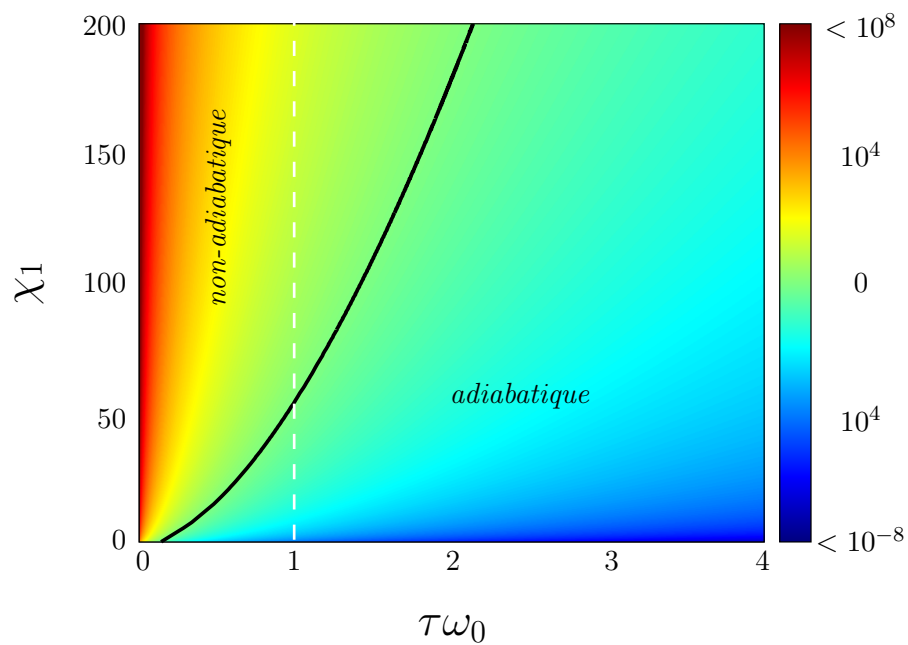


FIGURE 1.6 – Rapport du terme dynamique sur le terme intrinsèque en fonction de τ durée caractéristique de la transformation d'un potentiel harmonique de pulsation ω_0 et de la force des interactions en dimension un. La frontière entre les régime adiabatique et non-adiabatique est en pointillés blanc pour le cas sans interaction et en noir dans le cas avec interactions. Dans ce dernier cas, il faudrait étudier plus en détail le régime où χ_1 tend vers 0 et où le régime de Thomas-Fermi n'est plus valide.

La dernière équation traduit le facteur d'échelle final afin que le condensat soit dans l'état fondamental du puits après ouverture (1.49). Nous choisissons par exemple une fonction polynôme du cinquième degré pour le paramètre d'échelle $\lambda(t)$ dont les coefficients sont déterminés à partir du système (1.70) :

$$\lambda(t) = 1 + 10\alpha \left(\frac{t}{\tau}\right)^3 - 15\alpha \left(\frac{t}{\tau}\right)^4 + 6\alpha \left(\frac{t}{\tau}\right)^5 \quad \text{avec } \alpha = \left(\frac{\omega_0}{\omega_f}\right)^{2/3} - 1. \quad (1.71)$$

On vérifie ainsi toutes les conditions aux limites (1.70). Le carré de la pulsation instantanée du puits se déduit immédiatement de l'équation (1.56) et s'écrit :

$$\omega(t)^2 = \frac{\omega_0^2}{\lambda(t)^3 - \frac{\ddot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}} \Theta(\tau - t) + \omega_f^2 \Theta(t - \tau). \quad (1.72)$$

La figure (1.7 (a)) présente un exemple de variation de la pulsation au cours du temps lors de l'ouverture du puits. Sur la figure (1.7 (b)) est représentée l'énergie cinétique au cours de l'ouverture. L'accord entre le modèle et les simulations numériques est excellent. La figure (1.8) présente l'énergie cinétique au cours de l'ouverture (de ω_0 à $\omega_0/10$) pour différents temps caractéristiques d'ouverture. L'état final est le fondamental du nouveau puits, il y a bien *court-circuit de l'adiabaticité* lorsque le temps nécessaire à la transformation est rapide en regard de $2\pi/\omega_0$. Plus l'ouverture est rapide, moins elle est adiabatique. La pulsation du puits initial est de $\omega_0 = 2\pi \times 150$ Hz, d'après la figure 1.6 pour $\chi_1 = 77$, la transformation est adiabatique pour $\tau > 50$ ms ce qui est cohérent avec la figure (1.8). Le très bon accord montre que notre calcul de l'énergie cinétique instantanée d'un condensat dans le régime de Thomas-Fermi initialement est très performant. Ces figures montrent également que plus la transformation est rapide plus le prix à payer transitoirement sur l'énergie cinétique est important. En pratique, des limites peuvent exister du fait des non linéarités du potentiel confinant. Une autre limite est donnée par Anandan et Aharonov , [11, 12] qui ont montré l'existence d'une relation entre la dispersion en énergie $\Delta H \equiv (\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2)^{1/2}$ et le temps moyen du processus τ :

$$\tau \Delta H \geq \frac{h}{4}, \quad (1.73)$$

où la moyenne est calculée pendant l'évolution entre les deux états. Cette relation est valable quelque soit l'hamiltonien. Elle fournit une borne inférieure à la déviation en énergie, mais n'est pas très contraignante en pratique [13].

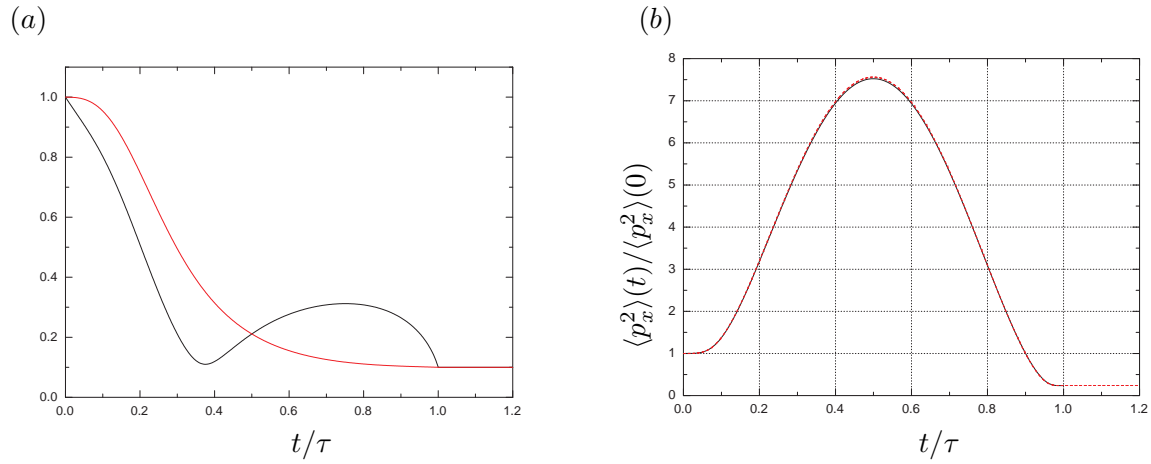


FIGURE 1.7 – (a) Pulsation $\omega(t)/\omega_f$ pour $\omega_0/\omega_f = 10$, $\tau = 8$ ms (noir) et $\tau = 80$ ms (rouge). Pour des ouvertures fortement non-adiabatique, la loi de variation de la pulsation n'est pas nécessairement monotone. (b) Énergie cinétique normalisée à sa valeur initiale lors d'ouverture du puits ($\omega_0/\omega_f = 10$) en $\tau = 8$ ms court-circuitant l'adiabaticité. En noir, la simulation numérique, en rouge la formule, l'accord est excellent.

1.5 Dynamique dans l'espace des impulsions d'un BEC avec interactions dans un potentiel harmonique anisotrope à deux dimensions

Dans cette partie, nous étendons les études précédentes à des condensats faiblement anisotropes en dimension deux et trois.

1.5.1 Énergie cinétique du condensat dans le régime de Thomas-Fermi

Dans l'hypothèse de faible anisotropie, l'énergie cinétique selon l'axe i ne dépend que du rayon de Thomas-Fermi selon cet axe :

$$E_{\text{cin},i}(R_i) = \frac{\langle p_i^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int k_i^2 |\widetilde{\Phi}_0(\mathbf{k})|^2 dk_i = \frac{K_d[R_i]}{d}, \quad (1.74)$$

où K_d est défini par la formule (1.51). La figure (1.9) permet de visualiser sur un exemple les limites de l'hypothèse de faible anisotropie. En noir sont représentées les énergies cinétiques selon les axes x et y en fonction du rapport d'anisotropie R_x/R_y d'un condensat dans l'état fondamental et en rouge la valeur donnée par la formule (1.74). Le potentiel considéré est un puits harmonique tel que $\omega_y = 2\pi \times 150$ Hz et dont ω_x varie entre $2\pi \times 75$ et $2\pi \times 300$ Hz. L'état fondamental du condensat Φ_0 en présence d'interactions ($g_2 = 267 \hbar^{1/2} \text{m}^{-1/2}$) est calculé par une méthode de convergence en temps imaginaire (voir appendice), dont nous déduisons l'énergie cinétique à partir de la transformée de Fourier $\widetilde{\Phi}_0$. L'accord est d'autant meilleur que la rapport d'anisotropie est proche de 1, l'erreur de l'ordre de 6% pour les rapports extrêmes de 0.5 ou 2 sur cet exemple.

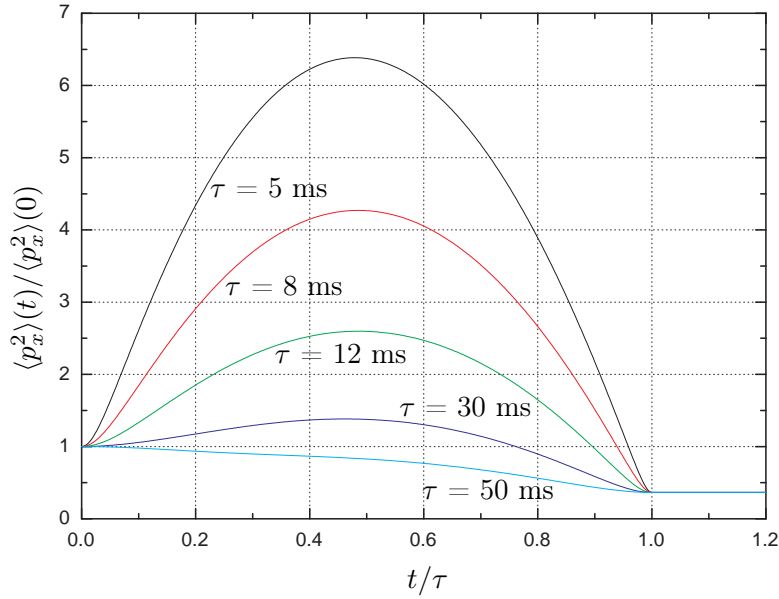


FIGURE 1.8 – Énergie cinétique normalisée à sa valeur initiale lors d'ouverture du puits ($\omega_0/\omega_f = 10$) court-circuitant l'adiabaticité pour différents temps d'ouverture τ .

1.5.2 Dynamique de l'énergie cinétique d'un condensat en présence d'interactions dans un piège anisotrope

La procédure peut être généralisée à la dynamique de l'énergie cinétique selon l'axe i pour un condensat dans un potentiel harmonique anisotrope en dimension deux :

$$\frac{\langle p_i^2 \rangle}{2m}(t) = \frac{K_2[\lambda_i(t)R_i^0]}{2} + \frac{\mu_2^0 N_0}{6\omega_{0,i}^2} \dot{\lambda}_i^2(t), \quad (1.75)$$

où λ_i évolue selon les équations des lois d'échelles (1.56). Cette équation ne présente pas de termes croisés, pour autant les énergies selon les différents axes sont reliées par les équations d'évolutions des paramètres d'échelle. La figure (1.10) représente l'énergie cinétique selon les axes x et y au cours du temps lors de l'ouverture linéaire selon la direction x . L'accord selon l'axe x est excellent entre les simulations numériques par méthode Split-Fourier et la formule (1.75). Cependant selon l'axe y , il y a un désaccord entre l'évolution exacte donnée par la simulation et la formule. La méthode pour étendre à des géométries anisotropes, qui consiste à traiter séparément les différentes directions n'est pas suffisante. Il serait nécessaire de développer une méthode qui prenne mieux en compte les courbures et les couplages entre les degrés de liberté.

Conclusion

Ce chapitre a permis de poser mes notations et de déterminer l'évolution de l'énergie cinétique d'un condensat dans un potentiel harmonique dont la pulsation dépend du

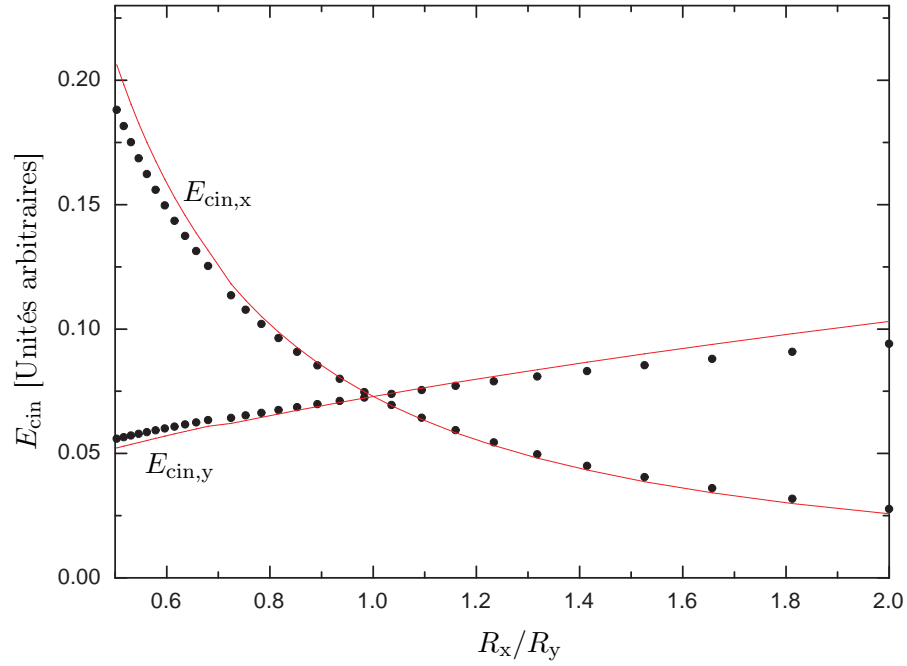


FIGURE 1.9 – *Energies cinétiques selon x et y d'un condensat à deux dimensions dans un piège anisotrope en fonction du rapport d'anisotropie R_x/R_y des rayons de Thomas-Fermi dans un piège harmonique tel que $\omega_y = 2\pi \times 150$ Hz et dont ω_x varie entre $2\pi \times 75$ et $2\pi \times 300$ Hz. En noir : numérique, et rouge formule (1.74).*

temps. Nous avons étudié ce problème en l'absence et en présence d'interactions (dans le régime de Thomas-Fermi), à une, deux et trois dimensions. Nous avons mis en évidence les différents régimes : adiabatique et coupure brutale. Notre analyse donne accès à l'énergie cinétique dans tous les régimes intermédiaires. Nous avons finalement montré les limites de notre approche dans le cas d'une trop forte anisotropie. Une partie de ce travail est publié dans Physical Review A sous le titre : "Guided-atom laser : Transverse mode quality and longitudinal momentum distribution" [14]. Dans le chapitre suivant, nous considérons le découplage optique d'un condensat de Bose-Einstein, c'est-à-dire la sortie de la fonction d'onde atomique, lorsqu'on diminue le potentiel de confinement selon une direction. L'étude de la première phase du découplage s'appuie sur les résultats de ce chapitre.

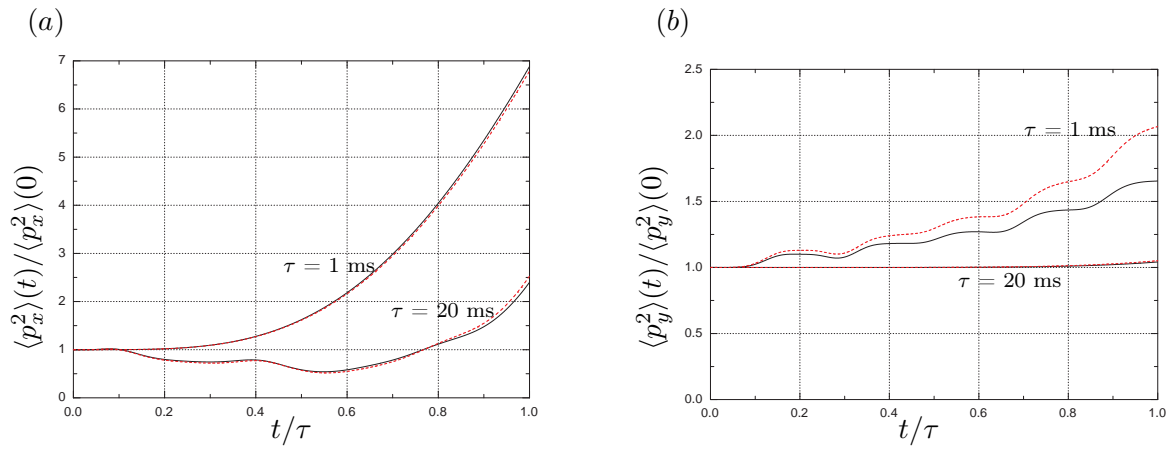


FIGURE 1.10 – *Dynamique de l'énergie cinétique d'un condensat à deux dimensions en présence d'interactions dans un potentiel harmonique anisotrope, de pulsation initiale $\omega_{0,x} = 2\pi \times 150$ Hz, dont la pulsation selon l'axe x est diminuée linéairement : $\omega_x(t) = 4\omega_{0,x}(1 - t/\tau)/5 + \omega_0/5$. La pulsation selon l'axe y reste constante $\omega_{0,y} = 2\pi \times 150$ Hz. En trait plein noir : simulations numériques, ligne pointillée rouge : formule (1.67). Un excellent accord est observé selon l'axe x pour différentes valeurs de $\tau = 1, 20$ ms.*

Chapitre 2

Découplage d'un laser à atomes

2.1 Problématique

2.1.1 Introduction

Les lasers à atomes sont produits par une extraction cohérente d'atomes à partir d'un condensat de Bose-Einstein piégé. La propagation du laser à atomes ainsi formé peut être guidée ou libre. Dans l'espace libre, les atomes sont soumis au potentiel gravitationnel, ce qui les accélère très fortement et par conséquent réduit rapidement leur longueur de de Broglie. Grâce à un guide optique horizontal, réalisé par exemple par un laser très désaccordé, il devient possible de s'affranchir de la pesanteur. Cependant, expérimentalement, il existe toujours une accélération résiduelle soit parce que le guide n'est pas parfaitement horizontal, soit parce que le condensat n'est pas initialement au waist du faisceau guide. Plusieurs expériences récentes ont produit des lasers à atomes guidés [15, 16, 17, 18, 19], notamment par notre équipe. Plusieurs méthodes pour extraire les atomes du piège initial ont été explorées :

- (i) Le découplage radio-fréquence qui consiste à changer l'état interne de l'atome, en le faisant passer d'un état piégé à un état non piégé ou anti-piégé au moyen d'un champ radio-fréquence.
- (ii) Le découplage magnétique qui s'applique sur des condensats où les atomes sont tous dans un même sous-état magnétique et qui consiste à appliquer un gradient de champ magnétique qui pousse les atomes hors du puits.
- (iii) Le découplage optique qui consiste à baisser progressivement la profondeur du puits, ce qui produit un déversement des atomes hors du puits. Nous allons dans ce chapitre nous focaliser sur ce dernier type de découplage.

Des études récentes de notre équipe ont permis de caractériser les populations dans les modes transverses des lasers à atomes produits par les deux dernières techniques de découplage (ii) et (iii). Il a été démontré expérimentalement que le découplage pouvait être rendu isentropique, il est donc possible en pratique de contrôler le nombre moyen d'excitations transverses lorsque les caractéristiques du condensat sont connues [17]. La cohérence longitudinale d'un tel laser à atomes guidé n'a toutefois pas été encore directement sondée.

Plusieurs expériences d'interaction de ces lasers à atomes avec des potentiels susceptibles de donner des informations sur la longueur de cohérence longitudinale sont envisageables. L'interaction de ces lasers à atomes avec des défauts contrôlés du potentiel de guidage a été étudiée théoriquement grâce au formalisme de la diffusion quantique en espace confiné [20]. Expérimentalement, l'interaction d'un laser à atomes guidé avec des potentiels structurés a été abordée dans différents travaux [21, 22, 23, 24].

Nous allons dans un premier temps, positionner précisément le problème et les quantités qui caractérisent le potentiel et la fonction d'onde. Nous focaliserons ensuite notre étude sur la dispersion de vitesse du paquet d'onde, d'abord en présence d'un champ de force constant et ensuite lors du découplage. Dans cette partie, nous reprendrons les travaux du chapitre précédent sur l'ouverture d'un potentiel harmonique (chapitre 1). Nous distinguerons les cas avec et sans interactions. Nous présenterons une partie sur la dynamique transverse lors du découplage. Enfin, dans une optique de contrôle, nous montrerons qu'il est possible de façonner le flux de sortie des atomes.

2.1.2 Position du problème et ordres de grandeur

Potentiel piégeant le long de l'axe du guide et état initial

Dans un premier temps, nous considérons une configuration à une dimension le long de l'axe du guide. Les atomes du condensat sont piégés dans un faisceau dipolaire de profil gaussien. Le découplage optique consiste à abaisser progressivement la profondeur du potentiel piégeant pour faire sortir les atomes du puits dans le guide, voir figure (2.1). Pour modéliser le découplage optique nous considérons un potentiel attractif gaussien dont l'amplitude décroît au cours du temps selon une fonction $f(t)$ qui tend asymptotiquement, en un temps caractéristique τ , vers zéro. Un terme d'accélération γ permet de tenir compte du fait que le guide n'est pas parfaitement horizontal (présence de gradients de champs magnétiques ou champs de force résiduels). L'accélération γ est responsable de la mise en mouvement du centre de masse du paquet d'onde. Le potentiel dépendant du temps s'écrit donc :

$$U(x, t) = m\gamma x - f(t)U_0 e^{\frac{-2x^2}{w_0^2}}. \quad (2.1)$$

Initialement, les atomes sont à l'équilibre dans le puits. En considérant le fond du puits initialement harmonique, nous avons rappelé dans le chapitre (1) les états initiaux sans interactions (1.1.1) et avec interactions (1.2.3). Le tableau suivant donne les ordres de grandeurs des différents paramètres du potentiel.

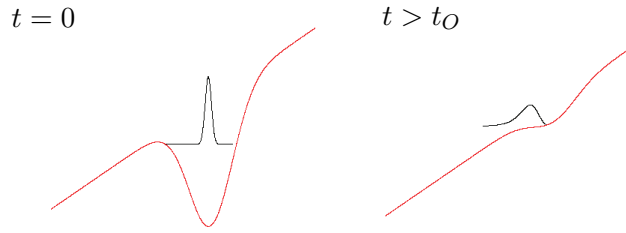


FIGURE 2.1 – *Potentiel modèle. Dans l'état initial, la fonction d'onde est piégée dans le potentiel gaussien. Pour $t > t_O$, le potentiel n'est plus piégeant, la fonction d'onde se découple du puits et se propage.*

Paramètres	Symbole	Ordres de grandeurs typiques
Profondeur du puits	U_0	$U_0/k_B = 3.7 \mu\text{K}$
Accélération du potentiel linéaire	γ	0.2 m.s^{-2}
Waist du faisceau piège	w_0	$40 \mu\text{m}$
Temps caractéristique d'évolution du potentiel	τ	$0 \text{ à } 100 \text{ ms}$
Pulsation harmonique initiale	ω_0	$2\sqrt{U_0}/w_0 \simeq 2\pi \times 150 \text{ Hz}$

TABLE 2.1 – *Paramètres de la modélisation et valeurs utilisées dans ce chapitre, sauf mention contraire. Ces paramètres ont été choisis proches des valeurs expérimentales [16, 17].*

Evolution temporelle du piège

L'objet de ce chapitre est de déterminer l'influence du choix de la fonction de découplage $f(t)$ sur le paquet d'ondes découplé. Le plus simple pour découpler les atomes, est de couper brusquement (rapidement devant toutes les constantes de temps du système) le potentiel piégeant, $f(t)$ est dans ce cas une fonction de Heaviside. En utilisant des fonctions de découplage plus élaborées, il est possible d'améliorer nettement certaines propriétés du paquet d'ondes découplé. Nous étudierons notamment la fonction de découplage exponentielle décroissante, utilisée expérimentalement par [16], et la fonction linéaire bornée dans le temps :

$$f_{\text{exp}}(t) = e^{-t/\tau}, \quad f_{\text{lin}}(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \times \Theta\left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \quad (2.2)$$

où τ est le temps d'évolution caractéristique. Cependant ce temps ne caractérise pas complètement l'évolution du piège et le découplage. Il y a en effet la fréquence instantanée du puits ou encore plus précisément t_O (proportionnel à τ), le temps pour lequel le potentiel n'a plus de minimum. On appelle x_c le minimum du potentiel de piégeage. Ce minimum, du fait de l'abaissement du puits et l'accélération résiduelle, est fonction du temps, on le note : $x_c(t)$.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_c(t), t) = 0, \quad t < t_O. \quad (2.3)$$

Le potentiel de piégeage ne présente plus un tel minimum pour $t > t_O$, où t_O est défini comme le temps pour lequel le minimum se transforme en un point d'inflexion. t_O se calcule selon la fonction découplage :

$$t_{O,\text{exp}} = \tau \left(\ln \left(\frac{2U_0}{m\gamma w_0} \right) - \frac{1}{2} \right) \simeq 4.08\tau, \quad t_{O,\text{lin}} = \tau \left(1 - \frac{m\gamma w_0}{2U_0} \sqrt{e} \right) \simeq 0.98\tau. \quad (2.4)$$

Les valeurs sont données avec les paramètres typiques (2.1). L'état initial n'est pas exactement centré sur le centre de la gaussienne mais au minimum du potentiel (2.1) $x_c(t=0)$. Nous avons pris en compte ce décalage dans les simulations numériques. En dernier lieu, une autre échelle de temps apparaît dans notre problème, la période d'oscillation dans le potentiel de piégeage. Lorsque l'amplitude du puits décroît, la pulsation décroît aussi. Dans l'approximation harmonique, la fréquence angulaire du puits s'écrit :

$$\omega(t) = \frac{2\sqrt{U_0 f(t)}}{w_0 \sqrt{m}}. \quad (2.5)$$

La période associée est :

$$T(t) = \frac{2\pi}{\omega(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_c(t), t)}} = \frac{w_0 \sqrt{m}}{\sqrt{U_0 f(t)}}. \quad (2.6)$$

Lorsque la profondeur du puits diminue, le puits s'ouvre. De ce point de vue, la première partie du découplage a été étudiée dans le chapitre précédent. A la physique de l'ouverture, il faut ajouter les effets de la pente. Dans le paragraphe suivant, nous rappelons les caractéristiques en vitesse d'un paquet atomique sur une pente.

2.2 Propriétés d'un paquet atomique en présence d'un champ de force constant

2.2.1 Dispersion de vitesse $\Delta v(t)$: cas classique

Nous considérons un ensemble de N atomes indexés par i , distribués selon l'état initial (1.1). Dans ce paragraphe, les atomes obéissent aux lois de la mécanique classique. La vitesse moyenne et la vitesse quadratique moyenne s'écrivent :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_i v_i, \quad \langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i v_i^2. \quad (2.7)$$

En dérivant une fois la première relation et deux fois la seconde, nous obtenons, via la loi du mouvement $a_i = g$ de Newton,

$$\frac{d\langle v \rangle}{dt} = g, \quad \frac{d^2\langle v^2 \rangle}{dt^2} = 2g^2. \quad (2.8)$$

En intégrant les relations précédentes entre $t = 0$ et t , et en tenant compte des conditions initiales, nous obtenons :

$$\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = (g^2 t^2 + 2g\langle v \rangle_0 t + \langle v^2 \rangle_0) - (gt + \langle v \rangle_0)^2 = \langle v^2 \rangle_0 - \langle v \rangle_0^2 = (\Delta v_0)^2. \quad (2.9)$$

Un champ de force constant ne modifie pas la dispersion en vitesse $\Delta v(t) = \Delta v_0$. **Par conséquent, une modification de $\Delta v(t)$ caractérise uniquement la phase de découplage.**

2.2.2 Dispersion de vitesse $\Delta v(t)$: cas quantique sans interactions

Pour calculer dans le cas quantique les dispersions $\Delta p(t)$ et $\Delta x(t)$, nous appliquons le théorème de Ehrenfest pour l'hamiltonien à une particule dans un champ de pesanteur :

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgx, \quad \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle. \quad (2.10)$$

Les dérivées temporelles de $\langle x \rangle$ et $\langle p \rangle$ se calculent aisément :

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[x, \frac{p^2}{2m} \right] \right\rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [x, p] \frac{p}{m} \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m} \quad \text{et} \quad \frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [p, mgx] \rangle = -mg. \quad (2.11)$$

Ces deux dernières associées aux conditions initiales $\langle p \rangle(t = 0) = 0$ et $\langle x \rangle(t = 0) = 0$ donnent

$$\langle x \rangle = -\frac{gt^2}{2}, \quad \text{et} \quad \langle p \rangle = -mgt. \quad (2.12)$$

L'évolution de $\langle x^2 \rangle(t)$ s'obtient par une procédure similaire

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} &= \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [x^2, \frac{p^2}{2m}] \rangle = \frac{\langle xp + px \rangle}{m} \\ \frac{d^2\langle x^2 \rangle}{dt^2} &= \frac{1}{m} \frac{d\langle xp + px \rangle}{dt} = \frac{2\langle p^2 \rangle}{m^2} - 2g\langle x \rangle \\ \frac{d^3\langle x^2 \rangle}{dt^3} &= \frac{2}{m^2} \frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} - 2g \frac{d\langle x \rangle}{dt} \\ \frac{d^4\langle x^2 \rangle}{dt^4} &= \frac{2}{m^2} \frac{d^2\langle p^2 \rangle}{dt^2} - 2g \frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2}. \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} = -2mg\langle p \rangle \quad \text{et} \quad \frac{d^2\langle p^2 \rangle}{dt^2} = -2mg \frac{d\langle p \rangle}{dt} = 2m^2 g^2. \quad (2.13)$$

D'où

$$\frac{d^4\langle x^2 \rangle}{dt^4} = 6g^2, \quad \text{et} \quad \frac{d^2\langle p^2 \rangle}{dt^2} = 2m^2 g^2. \quad (2.14)$$

Avec les conditions initiales $\langle p^2 \rangle(t = 0) = \langle p^2 \rangle_0$ et $\langle x^2 \rangle(t = 0) = \langle x^2 \rangle_0$ il vient

$$\langle x^2 \rangle = \frac{g^2 t^4}{4} + \frac{\langle p^2 \rangle_0 t^2}{m^2} + \langle x^2 \rangle_0, \quad \langle p^2 \rangle = m^2 g^2 t^2 + \langle p^2 \rangle_0 \quad (2.15)$$

En conclusion, en présence d'un champ de potentiel linéaire de même que dans le cas classique, les dispersions de positions et de vitesses à un instant t donné ne sont pas modifiées par rapport à l'évolution libre :

$$\Delta x(t) = \sqrt{\langle x^2 \rangle_0 + \frac{\langle p^2 \rangle_0}{m^2} t^2} \quad \text{et} \quad \Delta v(t) = \frac{\Delta p_0}{m} = \frac{\sqrt{\langle p^2 \rangle_0}}{m}. \quad (2.16)$$

Dans le cas d'une coupure brutale du potentiel confinant d'un paquet atomique en l'absence d'interactions, la dispersion de vitesses asymptotique est donc égale à sa valeur initiale :

$$\Delta v_C = \Delta v(t = 0). \quad (2.17)$$

2.2.3 Dispersion de vitesse $\Delta v(t)$: cas quantique avec interactions

Les dispersions de vitesses de paquet atomique en présence d'interactions, sont à comparer, dans l'optique de faire ressortir les gains des stratégies de découplage, à la dispersion Δv_C obtenue après coupure brutale du potentiel initial confinant. Dans le cas du paquet d'onde en présence d'interactions, nous avons vu dans le chapitre (1) que l'énergie d'interaction se transforme en énergie cinétique et par conséquent en dispersion de vitesse. Dans ce chapitre, nous comparons nos résultats de dispersions de vitesse à la dispersion asymptotique, voir formule (1.61), du même paquet obtenue après une coupure brutale. En dimension un, elle s'écrit :

$$\Delta v_C = \sqrt{\frac{4\mu_1}{5m}}. \quad (2.18)$$

2.3 Découplage d'un gaz classique

La phase de découplage détermine donc la dispersion du faisceau de particules. L'objectif de ce paragraphe est de trouver un modèle de la physique du découplage classique. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la seule phase de découplage, c'est-à-dire du départ des atomes, et non de l'ouverture précédent le découplage.

2.3.1 Modèle classique du découplage d'un potentiel harmonique tronqué

Nous considérons dans cette section un modèle simple de découplage. Il consiste à considérer un potentiel harmonique de pulsation ω_0 tronqué à une énergie qui décroît au cours du temps. Nous supposons que la pulsation reste constante au cours du temps :

$$V(x, t) = \begin{cases} \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} - V_0(t) & |x| < a \\ 0 & |x| > a. \end{cases} \quad \text{avec } a = \sqrt{\frac{2V_0(t)}{m\omega_0^2}} \quad (2.19)$$

Initialement, les atomes sont répartis énergétiquement selon une distribution thermique d'équilibre. Nous formulons l'hypothèse que la distribution énergétique des atomes ne

change pas au cours du temps, alors que la hauteur du potentiel diminue. Le découplage d'un atome donné a lieu, sous notre hypothèse, lorsque son énergie est supérieure à la profondeur du puits. Le nombre instantané d'atomes $N(t)$ dans le puits est alors donné par :

$$N(t) = \int_{-V_0(t)}^0 \rho(\epsilon)^{-\beta(\epsilon+V_0(t))} d\epsilon, \quad (2.20)$$

où $\beta = 1/(k_B T)$ et $\rho(\epsilon)$ est la densité d'états qui est constante dans le cas d'un oscillateur harmonique à une dimension $\rho = 1/(\hbar\omega_0)$. En différenciant (2.20) à β constant nous obtenons :

$$dN = -\beta N dV_0 + \frac{dV_0}{\hbar\omega_0}, \quad (2.21)$$

qui s'intègre indépendamment de la forme de $V(t)$ en :

$$\frac{N(t)}{N(0)} = 1 + \frac{e^{-\beta V_0(0)}}{1 - e^{-\beta V_0(0)}} \left(1 - e^{\beta(V_0 - V_0(t))} \right). \quad (2.22)$$

Nous testons notre modèle au moyen d'une simulation Monte-Carlo en prenant $V_0(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$ et une pulsation du potentiel harmonique ω_0 égale à $2\pi \times 150$ Hz. La figure (2.2) représente la densité de présence dans le puits au cours du découplage pour $\tau = 1$ et 50 ms. Pour simuler une situation classique équivalente, dans ces conditions initiales, à celle quantique, nous choisissons un gaz à une température $^1T = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}$. L'accord est excellent lorsque le temps caractéristique de découplage τ est grand devant la période d'oscillation. La hauteur initiale du puits n'est pas un paramètre pertinent quant à la validité du modèle, il est juste nécessaire que tous les atomes soient initialement dans le puits. Lors d'un découplage classique lent, les atomes sortent lorsque leur énergie est juste supérieure à la profondeur du puits, et par conséquent **les atomes sont découplés avec une vitesse initiale nulle**.

2.4 Découplage 1D d'un gaz idéal : cas quantique

Dans cette partie, nous nous intéressons au découplage d'un paquet d'onde en l'absence d'interactions. Cette hypothèse permet dans un premier temps de simplifier le cadre de l'étude, pour dans la partie suivante, discerner plus précisément les effets des interactions. Cette étude est aussi valable pour des condensats dont la force des interactions est relativement faible en ayant éventuellement recours à une résonance de Feshbach ou bien à un condensat initialement très dilué ou avec un très petit nombre d'atomes.

2.4.1 Forme du paquet d'onde après découplage classique et quantique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la densité de probabilité de présence de la fonction d'onde suite au découplage du paquet atomique. Nous comparons les cas classique et quantique. Les deux états initiaux sont identiques au sens des dispersions initiales de

1. Voir chapitre (1) (1.1.1)

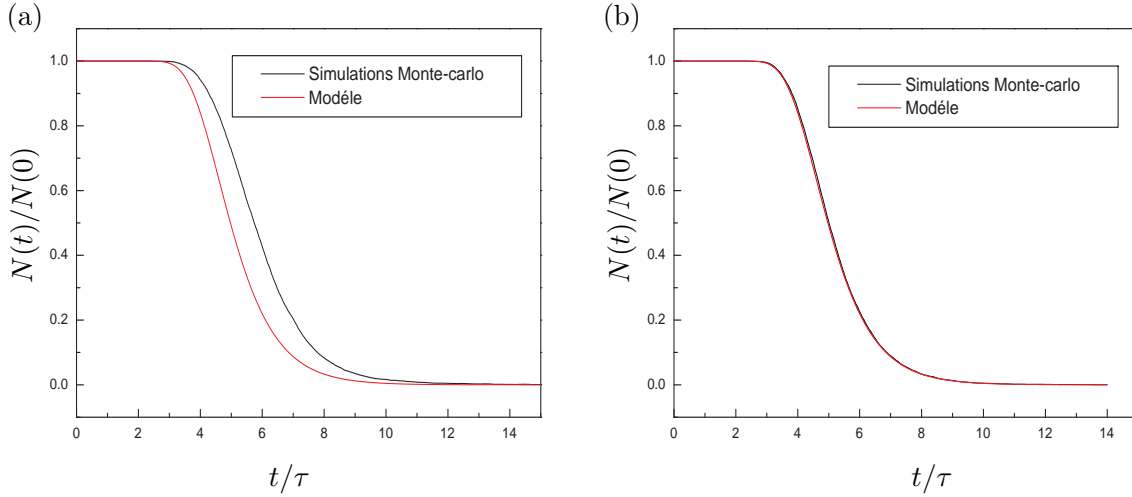


FIGURE 2.2 – *Dynamique de la densité de présence dans le puits au cours du découplage pour (a) $\tau = 1$ et (b) 50 ms. Nous comparons le résultat simulé numériquement et l'évolution donnée par la formule (2.22). La hauteur initiale de ce puits est $V_0 = 100 \hbar \omega_0$.*

positions et de vitesses (voir (1.6)). L'évolution des particules classiques est obtenue par une méthode symplectique d'ordre quatre (voir appendice). La figure (2.3) représente un exemple de densité de présence après un découplage. La trajectoire du centre de masse est identique dans le cas quantique et classique. Au niveau des derniers atomes classiques sortis du piège, autour de la position $30 \mu\text{m}$ sur la figure, la distribution classique (trait pointillé) présente un gradient important que la distribution quantique (trait plein) est incapable de reproduire à cause du terme de pression quantique qui "interdit" les variations brusques de la densité. La différence entre les deux distributions tient au fait que le potentiel exploré par les atomes n'est pas harmonique, il n'y a en effet dans ce cas plus d'équivalence entre l'évolution classique et l'évolution quantique. La distribution s'est déformée par rapport à sa forme gaussienne initiale. En tête de distribution, la probabilité classique est plus importante, les premiers atomes classiques sortent plus vite que leurs homologues quantiques. Ce qui permet de supposer que l'effet tunnel n'entre pas en compte dans le mécanisme de sortie des atomes, hypothèse que nous confirmerons pas la suite.

2.4.2 Etude énergétique

Dans cette partie, nous nous intéressons aux mécanismes de sortie des atomes du puits. Dans un premier temps, nous regardons si les atomes sortent ou peuvent sortir lorsqu'il y a encore des niveaux piégés dans le potentiel confinant. Ensuite, nous proposons à partir d'un ansatz de la fonction d'onde, de déterminer la taille critique de la fonction d'onde à partir de laquelle le condensat commence à se découpler.

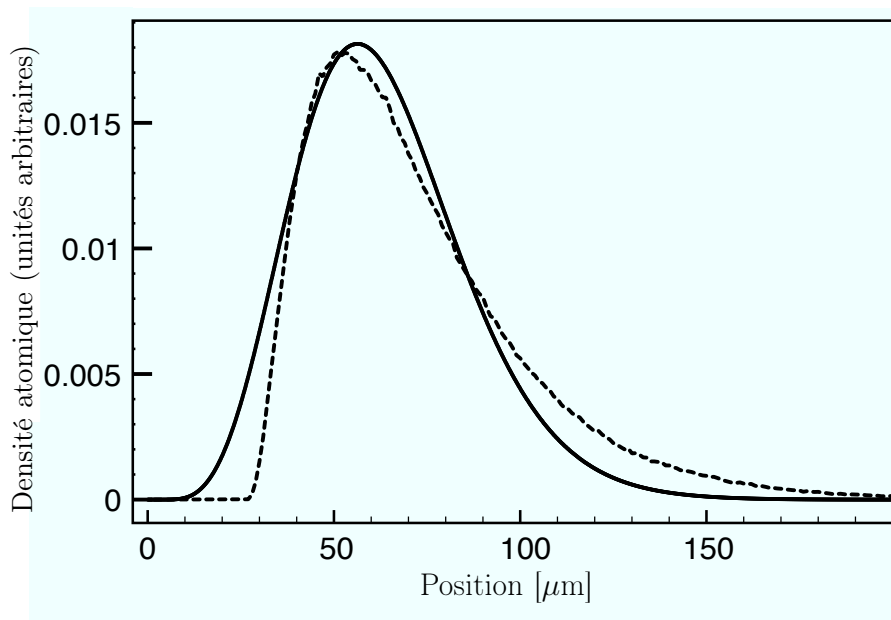


FIGURE 2.3 – Densité de présence juste après un découplage complet du paquet d'onde atomique : cas quantique (trait plein) et cas classique (trait pointillé). La distribution classique initiale est identique à celle quantique au sens de la relation (1.6). Les différents paramètres du puits sont rappelés dans le tableau 2.1. La fonction de découplage est une exponentielle décroissante et $\tau = 50$ ms.

États liés du puits

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux états liés du puits au cours du processus du découplage. Concrètement, nous comparons le nombre d'états liés par rapport au taux de découplage du paquet d'onde atomique. Le calcul numérique des états liés du puits, est réalisé pour chaque instant t , en diagonalisant la matrice de l'équation de Schrödinger stationnaire. La norme $\mathcal{N}_{\text{piege}}(\Psi)$ permet de mesurer le taux de découplage de la fonction d'onde :

$$\mathcal{N}_{\text{piege}}(\Psi) = \int_{x_g}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx, \quad (2.23)$$

où x_g , défini sur la figure (2.4), est l'abscisse du point frontière du puits. La figure (2.5) représente un exemple (f_{exp} et $\tau = 30$ ms), la densité piégée (a) diminue seulement après qu'il n'y ait plus d'états liés (b) dans le puits. Quelque soit le temps caractéristique ou la dynamique (fonction f) du découplage, le départ des atomes a toujours lieu lorsque il n'y a plus d'états liés dans le puits. La physique du découplage en l'absence d'interaction se résume donc au découplage du dernier état lié.

Nous calculons maintenant l'effet tunnel à partir du dernier état lié.

Evaluation de l'effet tunnel lors de la phase de découplage

Pour comprendre le mécanisme du découplage quantique, nous regardons dans quelle mesure l'effet tunnel à partir du niveau fondamental E_0 du puits joue un rôle pour des

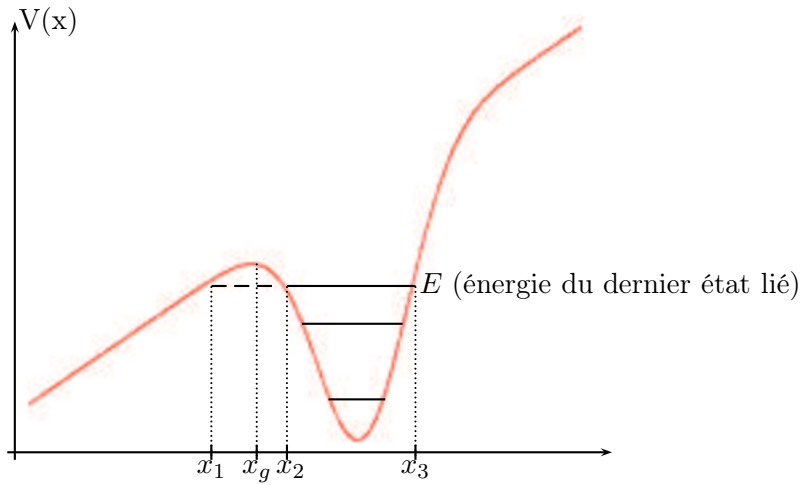


FIGURE 2.4 – États liés du potentiel de piégeage.

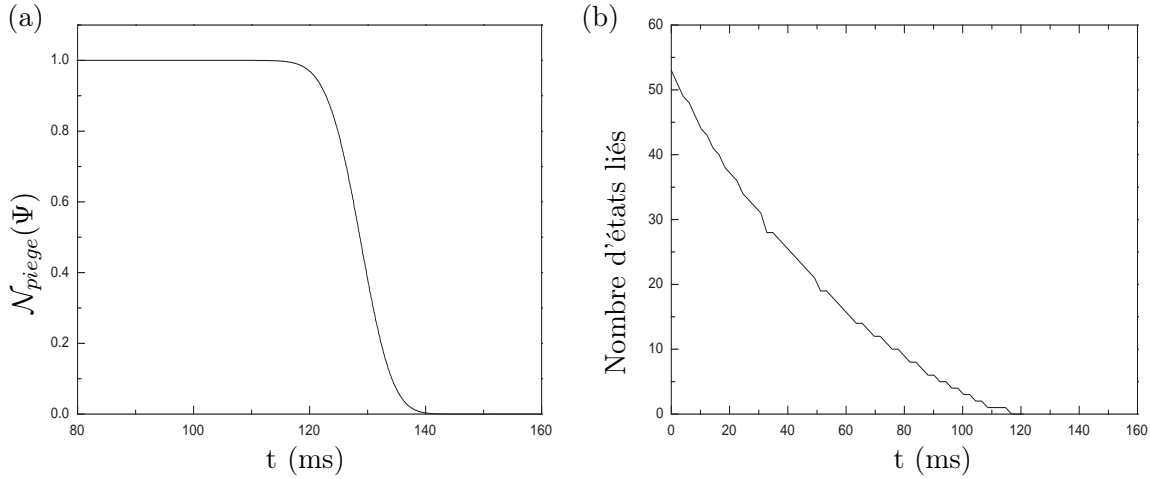


FIGURE 2.5 – (a) Densité atomique piégée au cours du découplage. (b) Nombre d'états liés dans le puits.

paramètres proches des expériences de notre groupe [16, 17]. On considère dans un premier temps l'effet tunnel à partir du niveau fondamental, ce qui présuppose un découplage adiabatique. Dans le cas d'un découplage non adiabatique, le découplage est plus rapide et l'étude de l'effet tunnel est pertinente que si l'effet tunnel joue déjà un rôle dans le cas adiabatique. La probabilité de transition tunnel s'écrit :

$$P(t) = e^{-2K}, \quad \text{avec } K(t) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(2m/\hbar^2)[V(x, t) - E_0]} dx. \quad (2.24)$$

Les différentes notations sont explicitées sur la figure (2.4). Le temps d'échappement t_{echap} caractérise le temps moyen passé dans le puits avant que la particule sorte par effet tunnel

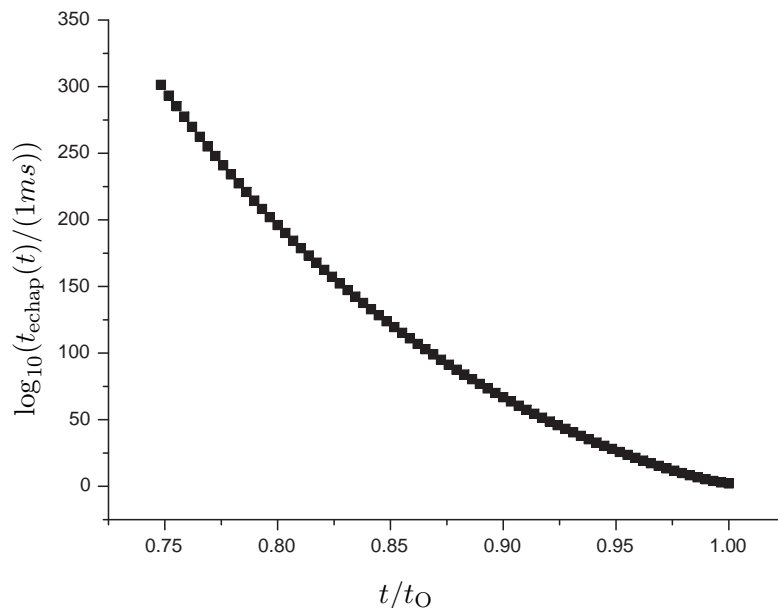


FIGURE 2.6 – Evolution du temps d'échappement par effet tunnel au cours du découplage.

[25], il vaut :

$$t_{\text{echap}}(t) = \frac{2\pi}{\omega(t)P(t)}, \quad (2.25)$$

où $\omega(t)$ est la pulsation dans l'approximation harmonique (2.5). La figure (2.6) représente un exemple de variation du temps d'échappement au cours du découplage. Le potentiel initial est caractérisé par les paramètres du tableau (2.1), la fonction de découplage est une exponentielle décroissante. La valeur du temps d'échappement diminue au cours du processus de découplage, car la hauteur de la barrière diminue. Cependant, à 99% du découplage, le temps d'échappement est encore de 150 ms. Pour percevoir les effets de l'effet tunnel, le pourcent restant du temps de découplage doivent durer 150 ms, soit dans cet exemple des temps de découplage de l'ordre de la dizaine de secondes. Les constantes de temps de l'effet tunnel sont dans tous les cas très nettement supérieures à tous les temps caractéristiques de la physique du découplage. L'effet tunnel n'est donc jamais responsable du découplage de la fonction d'onde du potentiel piégeant dans notre gamme de paramètres.

Etude de la phase de décrochage, de la rupture d'adiabaticité, départ des atomes lors d'une ouverture adiabatique

Au cours du processus de découplage, il y a nécessairement rupture d'adiabaticité au moment du départ des atomes. Dans ce paragraphe, nous développons un modèle qui permet de déterminer le moment où la rupture d'adiabaticité s'opère en fonction de la pente γ et des caractéristiques du piège. Lors de la phase d'ouverture, la profondeur du puits diminue, la distance entre le bord et le fond du puits diminue alors que le potentiel est de moins en moins confinant. Le moment de décrochage est défini précisément lorsque la taille de la fonction d'onde R_{atome} , à l'équilibre dans le potentiel instantané, devient plus

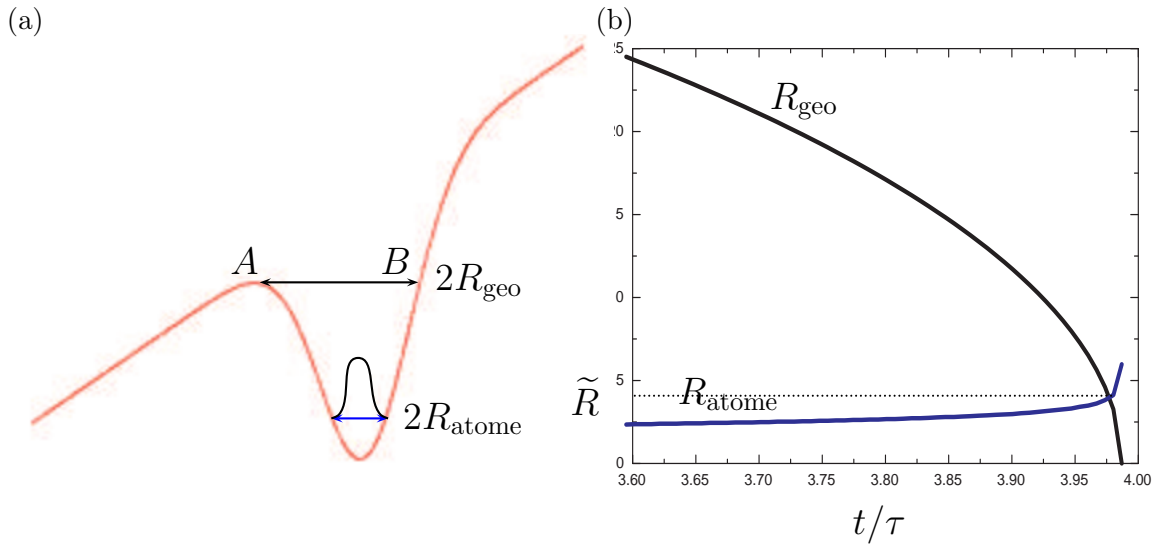


FIGURE 2.7 – (a) Définitions des quantités R_{atome} et R_{geo} . (b) Exemple de dynamique. Lorsque $R_{\text{atome}} = R_{\text{geo}}$, on définit \tilde{R} qui caractérise la taille de la fonction d'onde au moment où le déversement commence. Ce modèle est valable dans l'hypothèse d'une ouverture adiabatique. Les paramètres du potentiel initial sont donnés dans la table (2.1), la fonction de découplage est une exponentielle décroissante.

grande que la taille géométrique R_{geo} du potentiel piégeant (voir figure 2.7)(a). La quantité $R_{\text{atome}}(t/\tau)$ est obtenue en minimisant l'énergie totale (cinétique et potentiel) grâce à un ansatz gaussien :

$$\Psi(x, t)_{\text{ansatz gaussien}} = \left(\frac{1}{2\pi R_{\text{atome}}^2} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{x^2}{4R_{\text{atome}}^2} \right), \quad (2.26)$$

centré au minimum du puits $x_c(t/\tau)$ du potentiel $U(t/\tau)$ (2.1). La taille géométrique du puits est définie par la distance entre le point A où le potentiel est localement un maximum et le point B de même potentiel que en A. Le décrochage a lieu, lorsque $R_{\text{atome}} = R_{\text{geo}} \equiv \tilde{R}$. Cette condition permet de déterminer le moment du début du processus de vidage du potentiel lors d'un processus adiabatique. Lorsque l'ouverture n'est pas adiabatique, la fonction d'onde n'est plus dans l'état fondamental. La taille instantanée de la fonction d'onde oscille, au cours du processus d'ouverture, autour de la taille de l'état fondamental R_{geo} .

2.4.3 Dispersion de vitesse $\Delta v(t)$

Dynamique au cours du découplage pour un paquet d'onde sans interactions

L'évolution de la dispersion de vitesses au cours du découplage est représentée sur la figure (2.8) pour une fonction de découplage (a) exponentielle décroissante et (b) linéaire pour différents temps caractéristiques τ . Les différentes caractéristiques du puits sont données dans le tableau (2.1). Lors d'une coupure brutale du puits ($\tau = 0$), le paquet atomique

n'est en présence que de la pente : la dispersion de vitesses reste constante comme nous l'avons montré au paragraphe (2.2.2). Pour des temps caractéristiques différents de zéro, on peut distinguer trois phases : l'ouverture du puits, le découplage à proprement parler, c'est-à-dire le départ des atomes et la phase où les atomes sont sur la pente. Lors de l'ouverture la dispersion en vitesse diminue d'autant plus que l'ouverture est adiabatique. On retrouve pour les deux fonctions de découplage présentées que le déversement des atomes commence à t_O ($\simeq 4\tau$ pour la fonction exponentielle décroissante et τ pour la fonction linéaire). La phase dite 'd'étirement', où la dispersion augmente à nouveau, apparaît seulement à partir de $\tau = 20$ ms pour la fonction de découplage exponentielle et à partir de $\tau = 1000$ ms pour la fonction linéaire. Cette augmentation de la dispersion provient du départ d'une partie seulement des atomes qui sont accélérés, alors que les autres sont encore piégés. La fonction de découplage exponentiellement décroissante est très sensible à la phase d'étirement. En effet, le temps nécessaire pour que le potentiel ressenti par l'ensemble du paquet soit uniquement une pente est quasi infini. Lorsque les atomes sont sur la pente, la dispersion en vitesse n'est plus modifiée et reste constante comme nous l'avons montré dans le cas sans interactions (2.2.2) : le découplage est terminé.

Conditions pour une ouverture adiabatique

Dans ce paragraphe, nous étudions la phase d'ouverture du découplage et plus particulièrement les conditions sur le temps caractéristique τ pour que l'ouverture soit adiabatique. Pour un condensat sans interactions dans un potentiel harmonique dépendant du temps, il y a *adiabaticité* si la variation de la pulsation sur une période d'oscillation reste petite, soit plus quantitativement : $\frac{d\omega}{dt} \ll \omega^2$. Cette condition se décline différemment selon la fonction de découplage f . Dans le cas de la fonction de découplage exponentielle décroissante :

$$\tau \ll \frac{\sqrt{m}w_0}{4U_0 \exp(-t_O/2)} \simeq 4 \text{ ms.} \quad (2.27)$$

On retrouve bien ce résultat sur la figure (2.8)(a), où le régime d'ouverture adiabatique est atteint pour $\tau > 5$ ms. Plus le puits s'ouvre, plus la période d'oscillation est grande et plus l'ouverture doit être lente pour être adiabatique. La forme exponentielle décroissante est idéale pour une ouverture adiabatique. Dans le cas de la fonction de découplage linéaire, la condition d'adiabaticité est vérifiée au temps t , tant que :

$$\tau \ll \frac{\sqrt{m}w_0}{4U_0(1-t_O)^{3/2}} \simeq 1000 \text{ ms,} \quad (2.28)$$

ce que nous retrouvons sur la figure (2.8)(b).

Influence de la pente

La pente est le "moteur" du départ des atomes du puits. La figure (2.9) représente la dispersion finale après découplage, normalisée par la dispersion de vitesses obtenue après

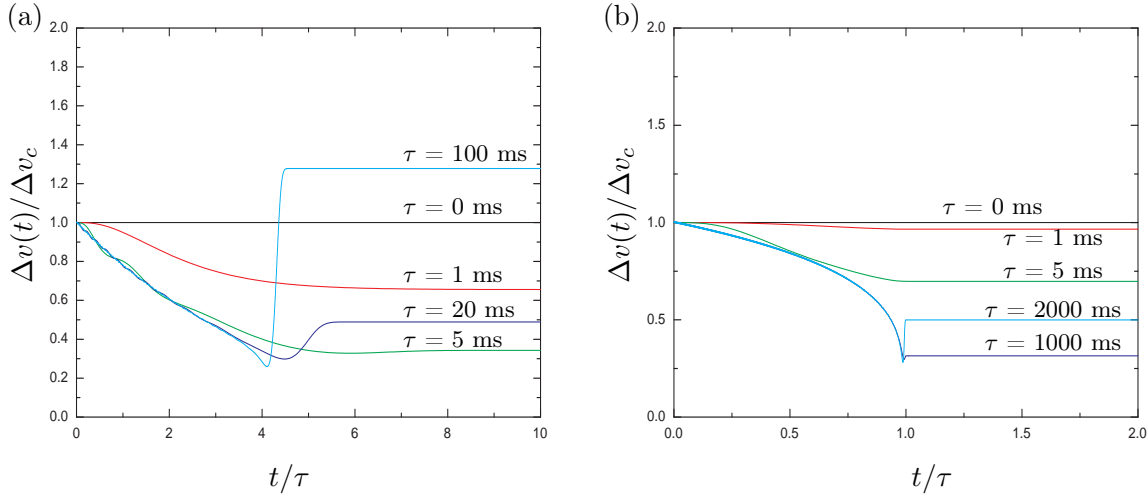


FIGURE 2.8 – *Rapport entre la dispersion des vitesses longitudinales et la dispersion de vitesse obtenue après coupure brutale du potentiel confinant (qui est aussi la dispersion initiale $\Delta v_0 = 0.58 \text{ m.s}^{-1}$) en fonction du temps, au cours du découplage pour différentes valeurs de τ . (a) fonction de découplage exponentielle décroissante. (b) fonction de découplage linéaire. Les paramètres du potentiel initial sont donnés dans la table 2.1.*

coupure brutale du potentiel confinant, en fonction du temps caractéristique τ pour différentes valeurs de la pente. A une valeur de pente donnée et pour des faibles valeurs du temps caractéristique τ , plus τ est important, plus l'on profite de la phase d'ouverture. Pour des τ plus importants, la phase d'étirement augmente la valeur asymptotique de la dispersion de vitesses. L'effet de la valeur de la pente est de modifier les durées relatives des différentes phases du découplage. Quelque soit τ , plus la valeur de la pente est importante, plus la phase d'ouverture est relativement courte et plus la phase d'étirement est relativement longue. La valeur de la pente fixe en définitive le rapport du temps d'ouverture sur le temps de la phase d'étirement. Par conséquent, plus la valeur de la pente est élevée plus le minimum de dispersion de vitesse asymptotique accessible est important.

Minimum de dispersion de vitesses asymptotique

Quelque soit la stratégie employée, il existe un minimum de la dispersion de vitesses du paquet atomique découplé. La stratégie pour obtenir ce minimum consiste à bénéficier de la phase d'ouverture adiabatique et ensuite à couper le potentiel confinant pour éviter l'effet de la phase d'étirement.

2.4.4 Conclusion découplage d'un gaz sans interaction

L'étude de la dynamique du découplage en l'absence d'interaction, nous permet de cerner les aspects purement liés à la dynamique du piège. Le découplage des atomes se caractérise par trois phases : ouverture du puits, phase d'étirement et la dernière phase

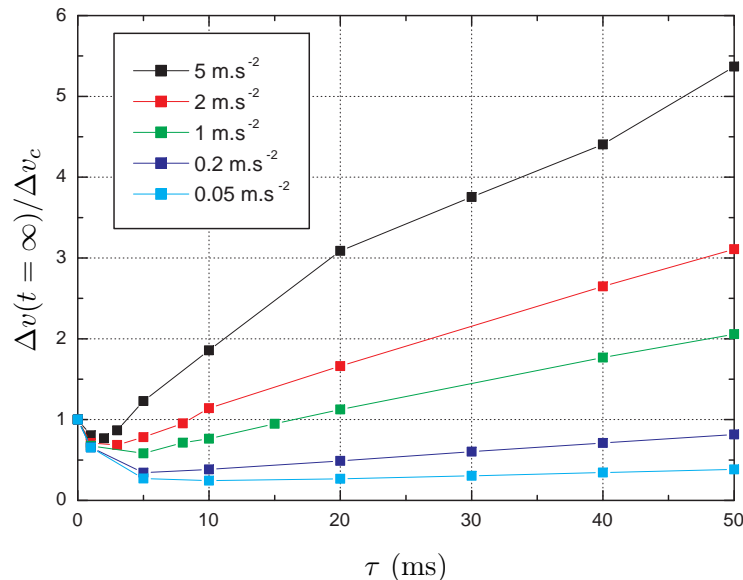


FIGURE 2.9 – Dispersion des vitesses après la phase de découplage normalisée par la dispersion de vitesse obtenue après coupure brutale du potentiel confinant, en fonction du temps caractéristique de découplage pour différentes valeurs de la pente γ . Les paramètres du potentiel initial sont donnés dans la table (2.1). La fonction de découplage est une exponentielle décroissante.

lorsque les atomes ne ressentent que l'effet de la pente. Lors de la phase d'ouverture, tous les atomes sont encore piégés, le potentiel confinant s'ouvre et la dispersion de vitesse du paquet d'ondes diminue. La phase d'étirement apparaît seulement pour des temps caractéristiques de découplage importants, elle traduit le départ différé dans le temps des atomes. La dispersion de vitesses globale du paquet d'onde augmente d'autant plus que la phase de déversement est relativement longue. Cependant, le paquet atomique est relativement monocinétique au sens où la vitesse locale à un endroit donné de la pente n'est pas sensible à cette phase d'étirement. Nous allons étudier cet effet dans le chapitre (6). Dans les parties suivantes, nous allons prendre en compte les interactions inter-atomiques dans la physique du découplage.

2.5 Découplage 1D d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'interactions

Nous prenons en compte les interactions inter-atomiques grâce à un terme de champ moyen. Nous avons vu, dans le chapitre (1) que la phase d'ouverture est profondément modifiée par la prise en compte des interactions, en effet en plus du terme d'énergie cinétique intrinsèque s'ajoute un terme dû à la conversion de l'énergie d'interaction en énergie cinétique.

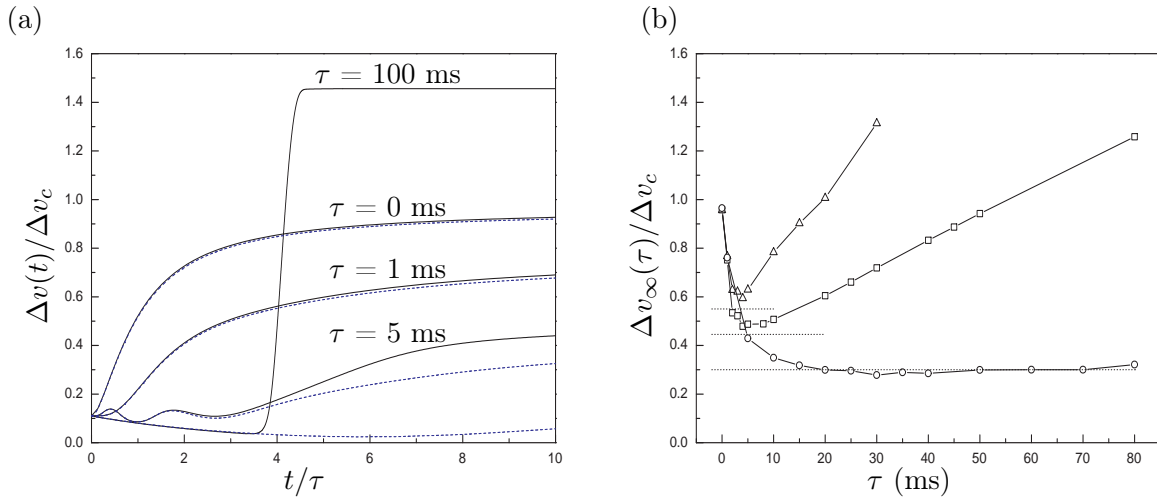


FIGURE 2.10 – (a) Rapport entre la dispersion de vitesses longitudinales et la dispersion de vitesses obtenue après coupure brutale du potentiel confinant $\Delta v_c = 2.25$ mm.s⁻¹, en fonction du temps caractéristique de découplage. Différents τ sont présentés. (b) Dispersion des vitesses longitudinales asymptotique après la phase de découplage normalisée par la dispersion initiale en fonction du temps caractéristique de découplage pour différentes valeurs de la pente $\gamma = 1$ m.s⁻² (losanges), $\gamma = 0.2$ m.s⁻² (carrés) et $\gamma = 0.01$ m.s⁻² (cercles). Les lignes en pointillée correspondent à la limite donnée par la formule 2.29.

2.5.1 Dispersion de vitesses longitudinales $\Delta v(t)$

Fonction de découplage exponentielle décroissante

L'évolution de la dispersion de vitesse en fonction de temps est représentée sur la figure (2.10)(a) pour différents temps caractéristiques. La dispersion en vitesse augmente pour $t < \tau$ (avant le découplage) pour les faibles valeurs de $\tau = 0$ et 1 ms mais diminue pour des temps caractéristiques plus longs $\tau = 100$ ms. Ce qui signifie que deux phénomènes avec des effets opposés sont impliqués dans la dynamique de la dispersion en vitesse. Pour un temps caractéristique intermédiaire $\tau = 5$ ms, le compromis se traduit transitoirement par des oscillations. Nous retrouvons ici, les résultats du chapitre précédent, à savoir la compétition en le terme dynamique et le terme intrinsèque de l'énergie cinétique lors de l'ouverture d'un potentiel. En ligne tiret est représentée la dispersion obtenue par le calcul de l'énergie cinétique (1.66). La dynamique est parfaitement reproduite pour $\tau = 0$ et 1 ms, le découplage est trop rapide pour voir la phase d'étirement. Pour $\tau = 5$ et 100 ms, la dynamique de l'ouverture est parfaitement capturée jusqu'à $t \approx t_0$. Le gain dû à l'ouverture pour $\tau \simeq 5$ ms est de l'ordre de 50 % par rapport à l'ouverture brutale.

La pente (paramètre γ) limite de manière ultime le minimum de dispersion en vitesse atteignable comme l'illustre la figure (2.10)(b) où est représentée la valeur asymptotique de la dispersion en vitesse en fonction de τ pour plusieurs valeurs de pente. La forme de ces courbes est bien comprise : la décroissance est due aux bénéfices de l'ouverture adiabatique, la remontée est due à l'allongement de la phase d'étirement de la fonction d'onde atomique

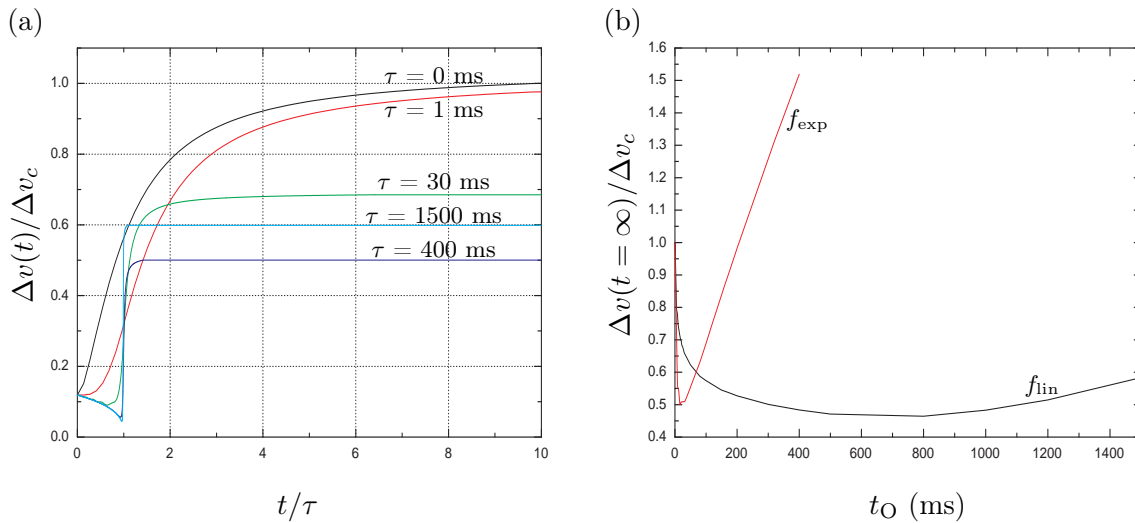


FIGURE 2.11 – *Dynamique de la dispersion de vitesse au cours du découplage. (b) Dispersion de vitesse asymptotique en fonction du temps de découplage t_O pour les deux types de fonctions de découplage étudiées.*

lorsque τ augmente. L'effet de la phase d'étirement diminue d'autant plus que la pente est faible.

Fonction de découplage linéaire

Le seul effet de la fonction de découplage linéaire est de modifier les temps relatifs des différentes phases du découplage. La figure (2.11 a) représente la dispersion de vitesse au cours du découplage. La figure (2.11 b) représente les dispersions de vitesse asymptotiques après découplage en fonction du temps de découplage t_O . La proportion de la phase d'étirement est beaucoup plus courte pour la fonction linéaire que pour la fonction exponentielle décroissante. Il faut donc des temps de découplage t_O plus importants pour observer la remontée due à la phase d'étirement.

Coupe brutale du puits pour minimiser la dispersion de vitesse asymptotique

Dans ce paragraphe, nous proposons une stratégie pour minimiser la dispersion en vitesse du paquet d'onde atomique. Nous avons vu dans le chapitre précédent les lois d'évolution de la dispersion en vitesse dans un potentiel dépendant du temps. Il en découle des stratégies pour diminuer ce transfert : ouverture adiabatique ou "court-circuiter" l'adiabaticité. Cependant, il reste l'effet de l'étirement du paquet d'onde à maîtriser. La technique la plus simple consiste à couper brutalement le puits après une phase d'ouverture adaptée. Soit t_c la date à laquelle est coupé brutalement le potentiel. A la différence du cas sans interactions, la dispersion de vitesse évolue après la coupure du puits. La figure (2.12)(b) représente un exemple ($\tau = 50$ ms), en rouge le découplage complet et en noir le cas où le potentiel est coupé à $t = t_O \simeq 4\tau$. On remarque que la figure (2.12)(b) représente la

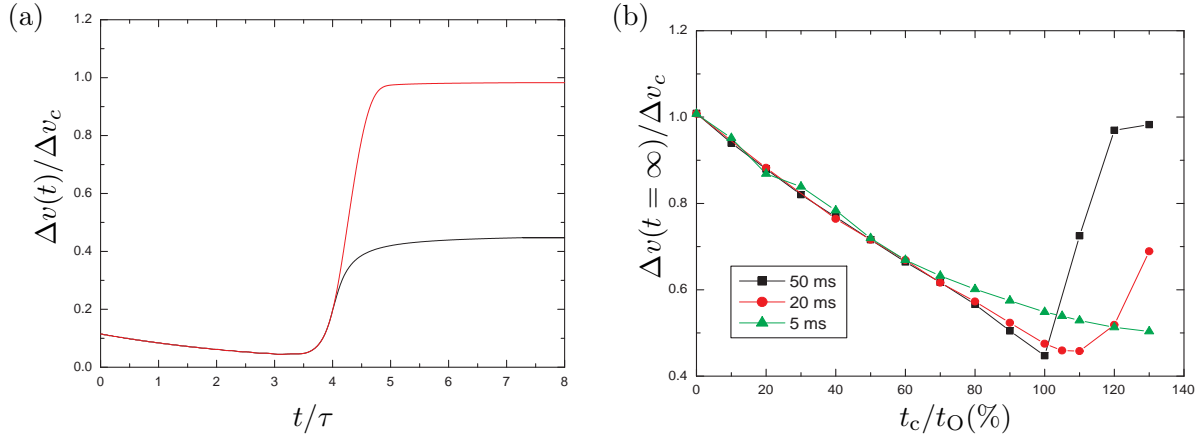


FIGURE 2.12 – (a) *Dynamique de la dispersion en vitesse pour $\tau = 50$ ms. En noir, le potentiel est coupé brutalement à $t = t_O \simeq 4\tau$, en rouge, le découplage est complet.* (b) *Dispersion asymptotique des vitesses après découplage et coupure brutale du potentiel à t_c en fonction de t_c en pourcentage de t_O .*

valeur asymptotique de la dispersion en vitesse en fonction de t_c pour différents temps caractéristiques de découplage. Pour $\tau = 50$ et 20 ms, la première partie de la courbe est décroissante jusqu'à $t_c = t_O$; c'est-à-dire que si l'on coupe brutalement le puits avant t_O on ne bénéficie pas entièrement de l'effet d'ouverture adiabatique. Sur la deuxième partie de la courbe croissante, plus l'on coupe tôt le puits, plus l'on diminue l'effet de la phase d'étiement. Pour τ égale à 5 ms, il n'y a pas de phase d'étiement, il n'est donc pas favorable de couper le puits avant la fin du découplage.

2.5.2 Etude de la phase de décrochage, de la rupture d'adiabaticité, départ des atomes

Quelque soit la stratégie employée, il existe un minimum de la valeur asymptotique de la dispersion en vitesse longitudinale. Dans ce paragraphe, nous adaptons le modèle du paragraphe 2.4.2 au cas avec interactions, qui permet d'estimer ce minimum en fonction de la pente γ , des caractéristiques du potentiel et de la force des interactions. Au cours du processus de découplage, il y a nécessairement rupture d'adiabaticité au moment du départ des atomes. Nous avons défini précisément cette condition au moment où la taille de la fonction d'onde R_{atome} , à l'équilibre dans le potentiel instantané, devient plus grand que la taille géométrique R_{geo} du potentiel piégeant (voir figure 2.7)(a). $R_{\text{atome}}(t/\tau)$ est la valeur qui minimise l'énergie (cinétique, potentielle et d'interaction) de l'ansatz gaussien (2.26). Le décrochage a lieu, lorsque $R_{\text{atome}} = R_{\text{geo}} = \tilde{R}$. En supposant que l'on coupe à cet instant le puits, la valeur correspondante de dispersion en vitesse asymptotique, est

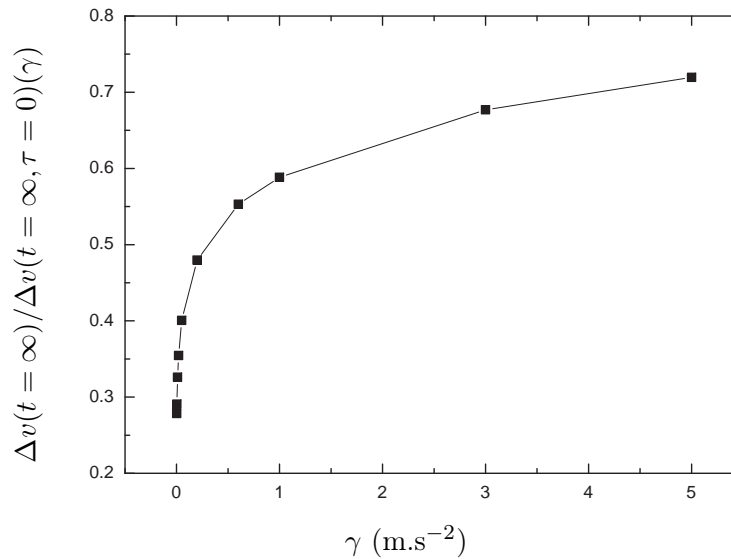


FIGURE 2.13 – *Dispersion en vitesse longitudinale minimum $(\Delta v)_{\min}$ normalisée par la dispersion obtenue après une ouverture brutale du puits, en fonction de la pente γ .*

obtenue par conservation de l'énergie :

$$(\Delta v)_{\min} = \left[\frac{2}{m} \left(K_1(\tilde{R}) + E_1^{\text{int}}(\tilde{R}) \right) \right]^{1/2}, \quad (2.29)$$

où $K_1(R)$ est le terme d'énergie cinétique fondamental (formule (1.51), chapitre (1)) et $E_1^{\text{int}}(R)$ l'énergie d'interaction correspondante. Ces limites sont représentées en ligne pointillée sur la figure (2.10)(b) et donnent une bonne estimation de la valeur asymptotique.

2.6 Découplage 2D d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'interactions

Le modèle à une dimension développé dans les parties précédentes nous donne les différentes stratégies pour contrôler les dispersions de vitesse longitudinale. Dans cette partie, nous considérons un modèle à deux dimensions pour tenir compte des degrés de liberté transverses. Cette étude permet, dans un premier temps, de valider l'étude à une dimension de la dispersion longitudinale pour ensuite voir les effets de couplage avec le confinement transverse. Nous considérons ici uniquement un modèle avec interactions. Cette étude donne des résultats en bon accord avec les observations expérimentales du groupe [16, 17].

2.6.1 Potentiels de piégeage

Nous allons considérer deux types de potentiels de piégeage. Le modèle le plus simple pour le guide consiste en un simple potentiel harmonique de pulsation angulaire ω_y dans la direction perpendiculaire (y) à l'axe de propagation x :

$$U_I(x, y, t) = m\gamma x - U_0 e^{-t/\tau} e^{-2x^2/w_0^2} + \frac{1}{2} m\omega_y^2 y^2, \quad (2.30)$$

Cependant ce potentiel minimise par construction les couplages entre les degrés de liberté transverses et longitudinal. Le potentiel U_{II} :

$$U_{II}(x, y, t) = m\gamma x - U_0 e^{-t/\tau} e^{-2(x^2+y^2)/w_0^2} + \frac{1}{2} m\omega_y^2 y^2. \quad (2.31)$$

est plus proche du potentiel utilisé expérimentalement dans la Ref. [17]. Le confinement transverse, à la différence du premier potentiel, n'est pas uniforme le long de l'axe de propagation. La pulsation initialement vue transversalement par les atomes s'écrit : $\sqrt{\omega_y^2 + 4U_0/w_0^2}$ soit $2\pi \times 212$ Hz pour $\omega_y = 2\pi \times 150$ Hz et les paramètres typiques (table 2.1) pour le potentiel selon la direction x .

2.6.2 La dispersion en vitesse longitudinale $\Delta v_x(t)$

La figure (2.14a) représente la dispersion en vitesse longitudinale au cours du découplage pour le premier potentiel U_I . La fonction de découplage est une exponentielle décroissante. Il n'y a aucune différence notable avec le potentiel à une dimension. La figure (2.14b) compare les dispersions en vitesse longitudinale après découplage en fonction du temps caractéristique de découplage. Les forces des interactions Ng_1 et Ng_2 ont été choisies pour que les rayons de Thomas-Fermi initiaux soient égaux en dimension un et deux. Les trois courbes sont sensiblement identiques. Ce qui justifie le modèle à une dimension pour étudier la dispersion en vitesse longitudinale et les stratégies de contrôle de celle-ci en présence d'interactions.

2.6.3 Excitations transverses

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux excitations transverses créés par le découplage des atomes. Initialement, les atomes sont dans l'état fondamental du piège transverse. Cependant le découplage et le changement de la pulsation transverse dans le cas du potentiel U_{II} sont susceptibles d'exciter des niveaux transverses. Sur la figure (2.16a) est représentée la dispersion longitudinale du paquet atomique. Le découplage engendre des oscillations transverses d'autant plus importantes que le découplage est rapide. Le nombre quantique effectif maximum Δn_{\max} permet de mesurer le degré de contamination des niveaux excités :

$$(\Delta y)_{\max}^2 = \frac{\hbar}{m\omega_y} \left(\Delta n_{\max} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.32)$$

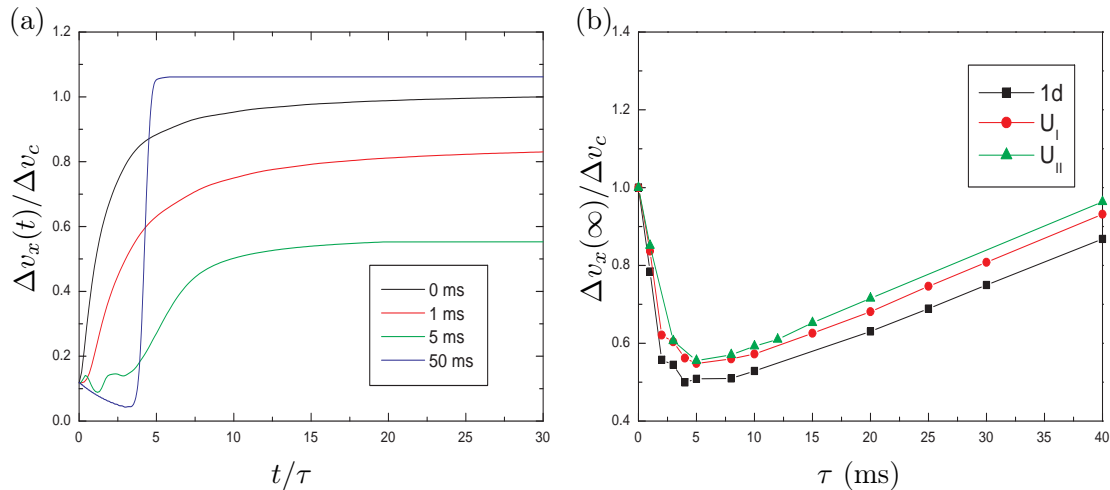


FIGURE 2.14 – (a) *Rapports entre la dispersion des vitesses longitudinales et la dispersion obtenue après coupure brutale du potentiel confinant $\Delta v_c(0) = 2.25 \text{ m.s}^{-1}$ en fonction du temps au cours du découplage, pour un condensat à deux dimensions pour différents τ . Le potentiel de piégeage est U_I .* (b) *Dispersion des vitesses après la phase de découplage normalisée par la dispersion initiale en fonction du temps caractéristique de découplage pour les deux potentiels envisagés U_I (cercles rouges) et U_{II} (triangles verts), à comparer au cas à une dimension (carrés noirs).*

où $(\Delta y)_{\max}^2$ correspond à la valeur asymptotique maximum de la dispersion transverse du paquet atomique. Avec nos paramètres typiques, la population dans le premier état excité reste inférieure à 10% pour $\tau < 10$ ms. Le taux de contamination augmente sensiblement, à τ donné, avec la force des interactions g_2 . La figure (2.16)(b) représente Δn_{\max} . Pour les deux potentiels, la contamination transverse reste faible (< 0.1) pour $\tau < 10$ ms, ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux de [17]. De plus, la forme spécifique de la fonction de découplage n'a pas d'influence sur le peuplement des niveaux transverse. Les longs temps de découplage sont optimaux pour réduire la contamination des niveaux excités transverse et permettent la réalisation d'un laser à atomes quasimonomode. Cependant, des temps caractéristiques de découplage trop longs ne sont pas profitables pour obtenir une dispersion en vitesse faible.

2.6.4 Coupure brutale du potentiel confinant

Comme nous l'avons vu, en dimension un, une stratégie pour contrôler la dispersion en vitesse peut nécessiter de couper brutalement le potentiel confinant. Dans ce paragraphe, nous vérifions que cette coupure brutale du potentiel confinant n'a pas d'incidence sur les excitations transverse. La figure (2.16) reprend l'étude de l'effet de la coupure brutale sur la dispersion de vitesse asymptotique, lorsque le potentiel est coupé à $t = t_0$ la phase d'étirement n'existe pas et on évite la contamination des niveaux transverse.

Lors d'une coupure brutale du potentiel, il est possible de retrouver à partir des lois

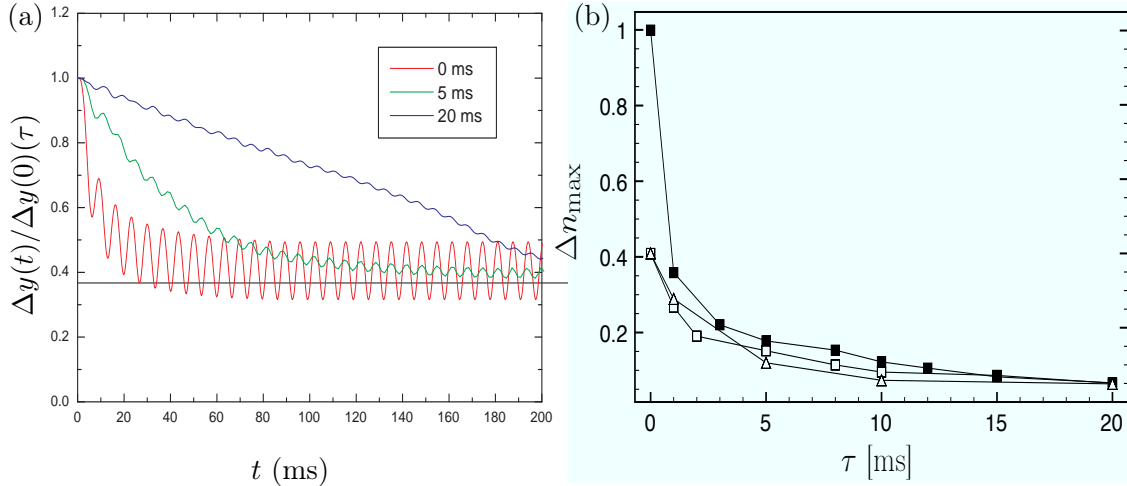


FIGURE 2.15 – (a) Dispersion transverse du paquet d'onde en fonction du temps pour différents temps caractéristiques de découplage, $\tau = 0, 5$ et 20 ms. L'amplitude des oscillations diminue avec le temps de découplage. La ligne noire correspond à la dispersion du fondamental du confinement transverse du guide. Les simulations numériques sont effectuées avec le potentiel U_I . (b) Borne maximum de la contamination transverse Δn_{\max} en fonction du temps caractéristique de découplage. Les simulations numériques sont effectuées avec le potentiel U_I (carrés et triangles ouverts) et U_{II} (carré noirs). La fonction de découplage est une exponentielle décroissante pour les carrés et une fonction linéaire pour les triangles.

d'échelle, la dynamique des oscillations transverses [26].

2.7 Façonnage du flux $J(t)$

Une autre question importante du point de vue expérimentale est la possibilité de contrôler le flux de sortie des atomes $J(t) = -dN(t)/dt$, où $N(t)$ est le nombre d'atomes piégés. Dans cette partie, nous montrons, que lorsque pendant le découplage, le condensat reste dans un état de quasi-équilibre, il existe une relation qui nous donne la fonction de découplage en fonction du flux de sortie désiré. Dans cette partie nous modélisons le potentiel par une pente et un potentiel harmonique dont la fréquence angulaire reste constante, voir figure (2.17, a). Cette simplification permet une solution analytique sans affecter la généralité de l'approche proposée et de ses conclusions.

Nous considérons un condensat à une dimension dans la limite de Thomas-Fermi. Le découplage s'opère en réduisant la profondeur $V(t)$ du puits à fréquence angulaire ω_0 constante. Ainsi, tant que le nombre d'atome dans le puits est constant, le potentiel chimique est constant, voir formule (1.49), chapitre (1). Soit t_μ , la date à laquelle le potentiel chimique est égale à la profondeur $V(t_\mu)$. Pour t_μ , le potentiel chimique $\mu(0)$ est inférieur à $V(t)$, aucun atome n'est découplé. Pour $t > t_\mu$, nous choisissons une échelle de temps telle que la décroissance du potentiel soit suffisamment lente pour que le potentiel chimique

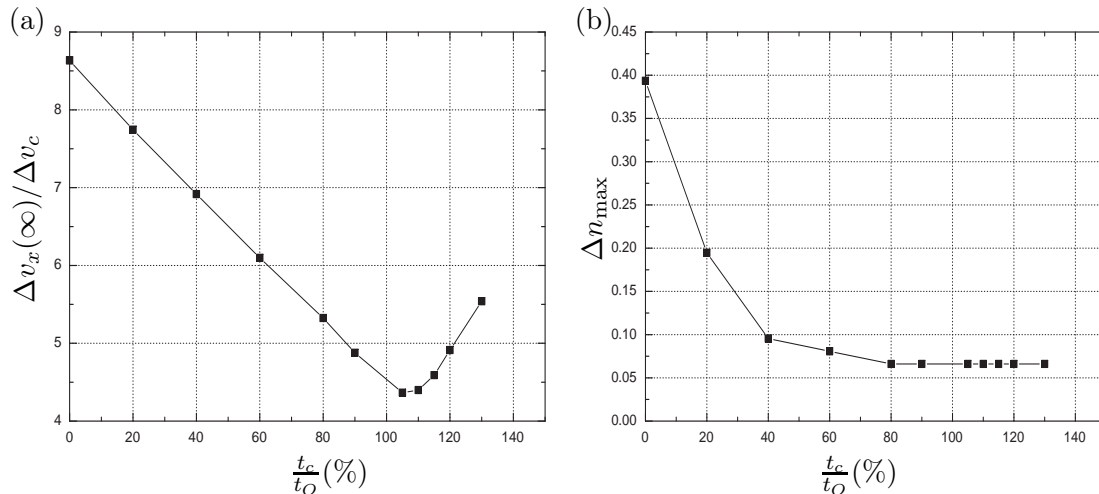


FIGURE 2.16 – (a) *Dispersion de vitesse asymptotique après découplage lorsque le puits est brutalement coupé à t_c . Nous retrouvons la même courbe que en dimension un (voir figure 2.12), ici pour $\tau = 20$ ms.* (b) *Excitations transverses en fonction de t_c , pour des coupures à plus de 80 % du temps de découplage complet, il n’y a quasiment pas d’effet de contamination des niveaux transverses.*

instantané se verrouille sur la profondeur lors du découplage :

$$\mu(t) = V(t). \quad (2.33)$$

En supposant que la relation entre le potentiel chimique et le nombre d’atomes piégés est valable dans un régime de quasi-équilibre :

$$\mu^3(t) = \frac{9g_1^2 N^2(t) \omega_0^2}{32}, \quad (2.34)$$

nous obtenons directement la profondeur du puits en fonction du flux désiré $J(t)$ pour $t > t_\mu$:

$$V(t) = \mu(t) = \mu(0) \left[1 - \frac{1}{N(0)} \int_{t_\mu}^t J(t) dt \right]^{2/3}. \quad (2.35)$$

Sur la figure (2.18) est représenté un exemple de flux contrôlé où nous avons choisi une consigne en flux carré (en ligne tiret) pour imposer un flux constant pendant un certain temps. Le flux de sortie effectif (en ligne continue), obtenu par simulation numérique réalisée avec la profondeur $V(t)$ donnée par l’équation (2.35). Le potentiel chimique se verrouille sur la profondeur instantanée du puits à partir de t_μ , voir figure (2.17, a). L’accord des flux est satisfaisant, hors régimes transitoires, on ne distingue pas les deux courbes. En ligne pointillée, est représentée le flux pour une fonction de découplage exponentielle. Pour adapter ce modèle à un potentiel gaussien, il est nécessaire de prendre en compte l’ouverture du puits. Dans la formule (2.34), il suffit de remplacer ω_0 par la fréquence angulaire dans l’approximation harmonique formule (2.5).

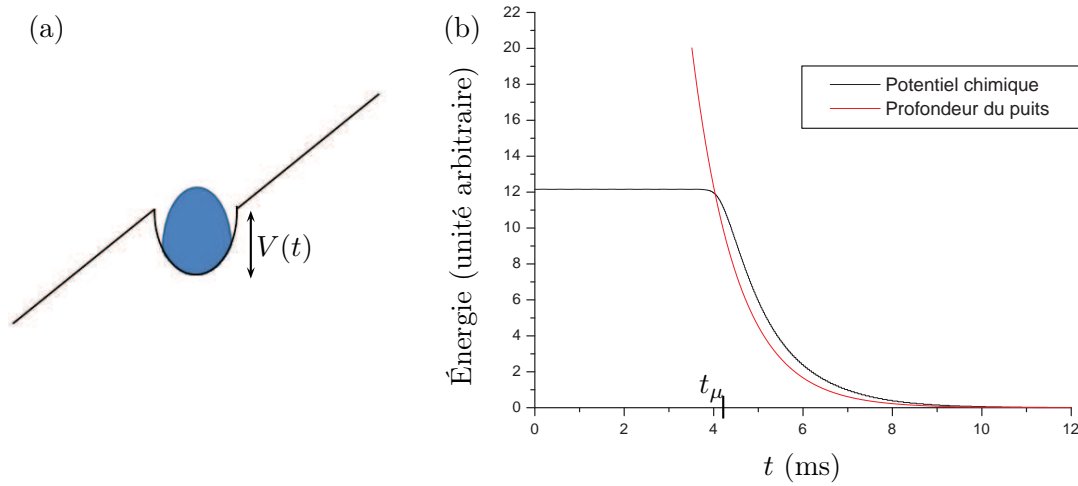


FIGURE 2.17 – (a) Schéma du potentiel modèle de découplage. (b) Potentiel chimique et profondeur du puits lors du découplage. Dans un premier temps, lorsqu'il n'y a pas de déversement le potentiel chimique reste constant. Lorsque la profondeur du puits atteint la valeur du potentiel chimique, si le découplage est suffisamment lent, le potentiel chimique se verrouille sur la profondeur instantanée du puits. La pulsation du puits est de $2\pi \times 150$ Hz. La force des interactions est de $g_1 N_0 = 60 \hbar^{3/2} m^{-1/2} s^{1/2}$.

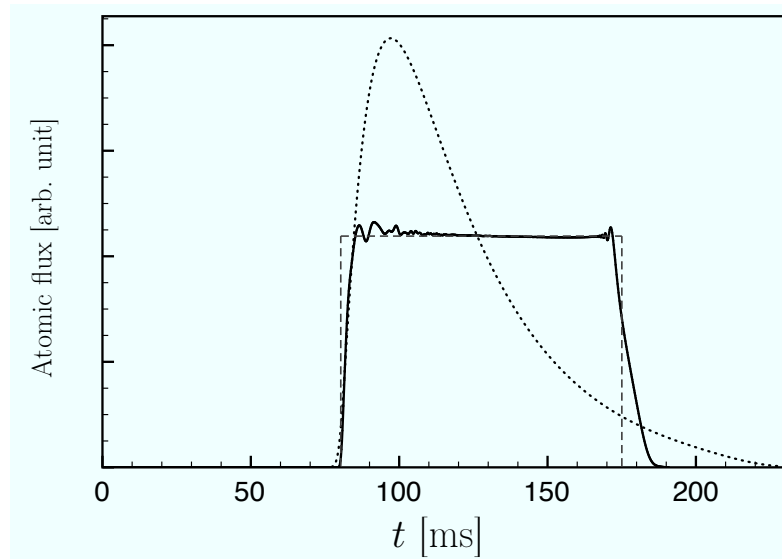


FIGURE 2.18 – Flux de sortie en fonction du temps. En pointillé, la fonction de découplage est une exponentielle décroissante. En trait continu, la fonction de découplage est déduite de l'équation (2.35), le résultat est obtenu par simulation numérique. En ligne tiret, le flux carré désiré. Hormis les périodes de transition, le flux est à peu près constant. La pulsation du puits est de $2\pi \times 150$ Hz. La force des interactions est de $g_1 N_0 = 60 \hbar^{3/2} m^{-1/2} s^{1/2}$.

Conclusion

Ce chapitre a approfondi les caractéristiques d'une source atomique produite par découplage d'un puits de potentiel. Nous avons abordé le cas d'un paquet atomique décrit par la mécanique classique et celui d'un condensat de Bose-Einstein sans ou avec interactions. Nos études ont été menées à 1d et 2d. Grâce à un petit modèle, nous avons montré qu'un contrôle en temps du découplage permettait de façonner le flux de sortie. Nos résultats à 2d en présence d'interactions constituent une confirmation théorique de l'efficacité du protocole de découplage utilisé dans les expériences menées par l'équipe [16, 17]. Dans le chapitre (6), nous montrons que la dispersion longitudinale instantanée de vitesse n'est pas nécessairement une grandeur pertinente pour des expériences où l'on utiliserait l'onde atomique découplée comme une sonde d'un potentiel très localisé dans l'espace des positions.

Chapitre 3

Diffusion d'une onde de matière sur un réseau optique

Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la production et la caractérisation de l'onde de matière produite à partir d'un condensat. L'objet de ce chapitre est l'étude de la diffusion de cette onde de matière sur un réseau optique. Cette situation est très différente de celle d'un condensat soumis, de manière brusque ou progressive, au potentiel d'un réseau optique, où la dynamique est alors entièrement dictée par l'évolution dans les différentes bandes autorisées. De nombreuses expériences ont été faites dans cette dernière configuration [27]. En abordant le réseau, le laser à atomes, peut sonder les bandes interdites et il est possible de remonter ainsi à la structure de bande. Ce type d'expériences, proposée initialement et indépendamment par Iacopo Carusotto et Luis Santos apporte des informations complémentaires, car les zones interdites sondées directement conduisent à des réflexions de l'onde de matière incidente [28, 29, 30]. L'objet de notre étude est, dans une première partie, de caractériser la réflexion-transmission du réseau en fonction des paramètres du réseau pour des ondes planes. Nous détaillerons le lien entre la théorie des bandes et la réflexion d'une onde incidente. La deuxième partie s'intéresse à la diffusion de paquet d'onde atomique sur un réseau optique. Nous étudions le cas théorique d'un réseau d'enveloppe carrée et le cas d'un réseau d'enveloppe gaussienne. Enfin, nous comparons les résultats expérimentaux avec les simulations. Le choix retenu pour les expériences est celui d'un réseau attractif, la réflexion y est d'origine purement quantique, sans équivalent classique.

3.1 Position du problème et caractérisation du potentiel optique

Nous considérons l'interaction d'une onde de matière en mouvement avec un réseau. Le réseau est placé selon l'axe de propagation x (voir figure 3.1). Dans un premier temps,

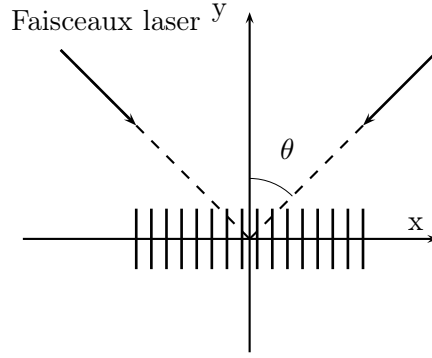


FIGURE 3.1 – Schéma de la géométrie des faisceaux lasers créant le réseau.

Paramètres	Symbole	Ordres de grandeurs typiques
Longueur d'onde du laser	λ_l	840 nm
Demi-angle entre les 2 faisceaux	θ	40.25°
Pas du réseau	$d = \lambda_l / [2 \sin(\theta)]$	$\simeq 650$ nm
Vecteur d'onde du réseau	$k = \pi/d$	
Énergie de recul	$E_R = \hbar^2 k^2 / 2m$	
Vitesse de recul	$v_R = 2\hbar k / m$	$\simeq 7$ mm.s ⁻¹
Profondeur normalisé du réseau	q	0 à 10

TABLE 3.1 – Paramètres de la modélisation et les valeurs utilisées dans ce chapitre, sauf mention contraire. Ces valeurs correspondent à notre dispositif expérimental [31].

nous négligeons les couplages avec les modes d'excitation transverses, ce qui nous permet de considérer un système à une dimension.¹

3.1.1 Potentiel modèle

Dans l'expérience [31], le réseau est produit par une onde stationnaire résultant de l'interférence de deux faisceaux laser de même longueur d'onde λ_l . Les deux faisceaux forment un angle 2θ (voir figure 3.1). L'hamiltonien modèle du système s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + 2qE_R(1 + \sin(2kx))f(x), \quad (3.1)$$

où f est une fonction enveloppe qui permet notamment de prendre en compte la forme gaussienne des faisceaux lasers utilisés dans l'expérience. Le pas du réseau d varie en fonction de l'angle θ , $d = \frac{\lambda_l}{2 \sin \theta}$. Cette longueur caractéristique d permet de définir une vitesse $v_R = 2\hbar k / m$ et une énergie $E_R = \hbar^2 k^2 / 2m$. Le tableau (3.1) résume les différents paramètres et ordre de grandeurs caractéristiques du réseau optique.

1. L'accélération résiduelle du potentiel de guidage n'est pas prise en compte dans cette partie

3.1.2 Caractérisation du potentiel

Dans ce paragraphe, nous décrivons la méthode de diffraction de Kapitza-Dirac, utilisée pour calibrer en pratique la profondeur du réseau. Cette dernière est proportionnelle à l'intensité lumineuse dans chaque faisceau. Théoriquement, il suffit de connaître les puissances lumineuses et les waists des deux faisceaux qui forment le réseau pour obtenir les caractéristiques du réseau. Cependant un désalignement expérimental des faisceaux entraîne une profondeur effective plus faible. Par ailleurs les faisceaux ne sont pas nécessairement parfaitement gaussiens. Seule une mesure locale sur les atomes nous donne la profondeur effectivement vue par les atomes. L'expérience de calibration de la profondeur du réseau consiste à exposer un condensat initialement au repos, c'est-à-dire sans vitesse initiale, au potentiel du réseau appliqué pendant une durée courte τ [32]. Une analyse après temps de vol permet de remonter à la distribution en impulsion du condensat. La fonction d'onde, dans l'espace des impulsions présente des pics centrés sur les valeurs $\ell 2\pi k$ où ℓ est un entier qui donne l'ordre de diffraction [33]. Les populations dans les différents ordres de diffraction en fonction du temps d'interaction τ sont données de manière exacte par des simulations numériques d'évolution de la fonction d'onde. Le seul paramètre d'ajustement est la hauteur du réseau q , ce qui nous permet de remonter à la hauteur effective vue par les atomes. Pour des temps τ courts (plus courts que la période d'oscillation d'un puits de potentiel) l'approximation de Raman-Nath donne une formule analytique pour les zéros des populations dans les différents ordres n :

$$J_n \left(\frac{qE_R\tau}{2\hbar} \right)$$

où J_n est la fonction de Bessel d'ordre n . L'intérêt des simulations est de ne pas se restreindre à des temps d'exposition au réseau ultra-courts et pour lesquels l'approche de Raman-Nath est valable.

La figure (3.2) représente un exemple de calibration de la profondeur du réseau, nous représentons les populations dans les premiers ordres de diffraction en fonction du temps d'interaction τ . La calibration se fait en ajustant au mieux le résultat donné par la résolution numérique de la dynamique de la fonction d'onde (courbe rouge) et les mesures expérimentales (courbe bleue). La courbe expérimentale est toujours supérieure à la courbe théorique quelque soit le paramètre d'ajustement, ce qui traduit un décalage lumineux. Mis à part ce décalage, les variations sont assez bien reproduites sur les quatre courbes représentées.

3.2 Première approche : Analyse par ondes planes

Dans toute cette partie, nous considérons des fonctions d'onde stationnaires d'énergie fixée dans le but d'étudier la réponse du réseau pour une énergie incidente donnée. Dans les parties suivantes, nous considérerons les effets de la dispersion en énergie du paquet atomique incident. Nous présenterons différentes méthodes d'étude de la diffusion de la

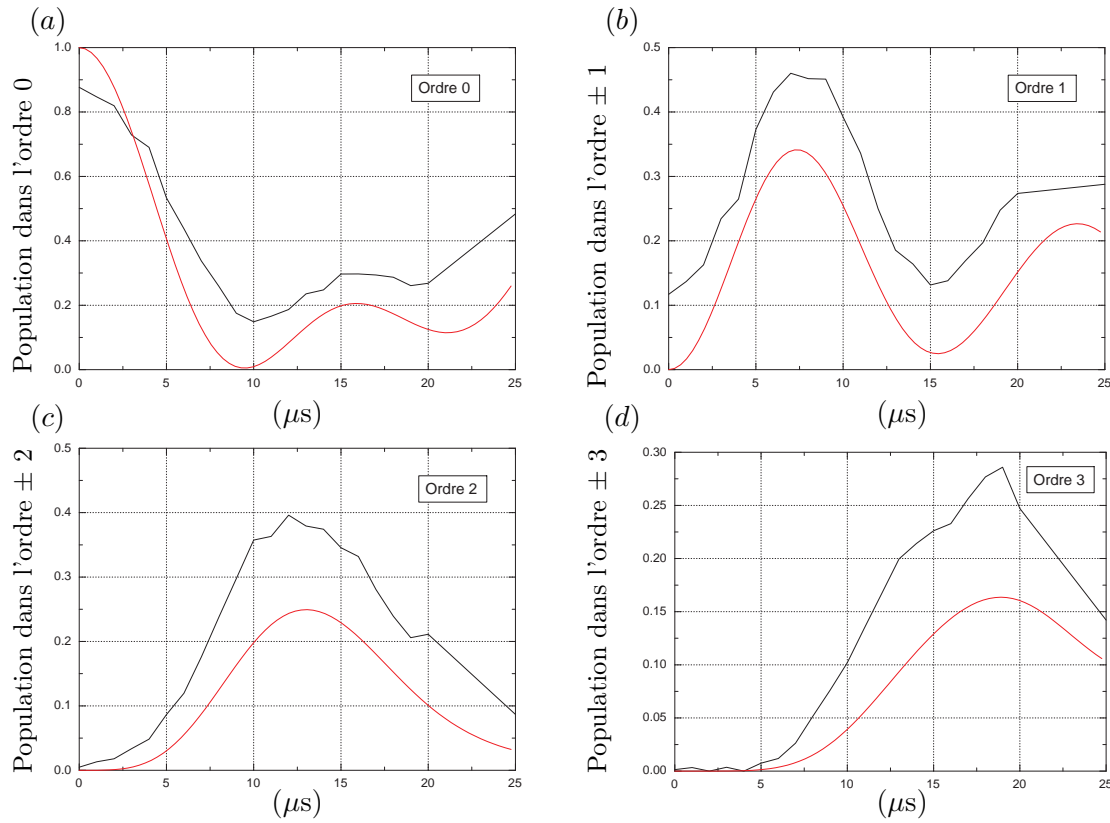


FIGURE 3.2 – Comparaison entre les résultats expérimentaux et simulations pour une expérience de diffraction de type Kapitza-Dirac pour calibrer la profondeur du réseau $q = 9$. En noir, les populations dans les différents ordres diffractés en fonction du temps d'interaction τ mesurées et en rouge le résultat donné par la résolution numérique de la dynamique de la fonction d'onde.

fonction d'onde sur un réseau. Une première approche consiste à regarder un réseau infini. Nous en déduisons l'existence de zones interdites dans le plan de paramètres sans dimension faisant intervenir l'énergie cinétique associée à l'onde plane et la profondeur des puits de potentiel. Nous tiendrons ensuite compte de l'extension finie du réseau et de la forme de l'enveloppe du réseau. Nous présenterons aussi le lien entre le diagramme de bande et la réflexion de la fonction d'onde incidente sur un réseau. Enfin, nous proposons une interprétation ondulatoire du phénomène de réflexion.

3.2.1 Réseau d'extension infinie

Détermination des zones de stabilité d'un réseau infini : Equation de Mathieu

Dans cette partie, nous considérons un réseau sinusoïdal infini. Dans l'introduction, nous avons insisté sur le fait que nous étudions une fonction d'onde qui aborde un réseau, ce qui est impossible avec un réseau infini. Cependant, il est utile de rappeler la stabilité d'une onde d'énergie donnée dans un réseau infini. Et comme nous le verrons, il y a correspondance entre la stabilité d'une onde d'énergie E_c dans un réseau infini et la réflexion

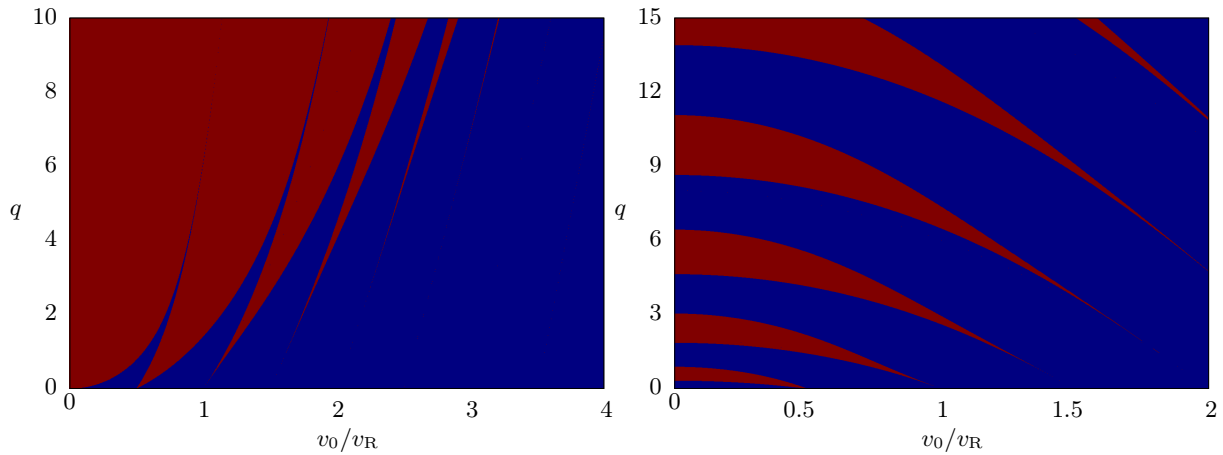


FIGURE 3.3 – *Stabilité de l'onde plane d'énergie $mv_0^2/2$ pour un réseau répulsif (à gauche) et attractif (à droite). Dans les zones rouges l'onde plane est instable, dans les zones bleues elle est stable.*

d'une onde d'énergie cinétique E_c sur le même réseau mais de taille finie.

Nous recherchons une solution Ψ stationnaire d'énergie E_c , l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien (3.1) s'écrit dans le cas d'un réseau infini ($f(x) = 1$) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{U_0}{2} (1 + \sin(2kx)) \Psi = E_c \Psi. \quad (3.2)$$

On pose $\tau = kx$, paramètre sans dimension, l'équation aux valeurs propres prend alors la forme de l'équation de Mathieu :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + (a + 2q \sin(2\tau)) \Psi = 0, \quad (3.3)$$

où $a = \frac{(2E_c - U_0)m}{\hbar^2 k^2}$, $q = \frac{U_0}{4E_R}$ et E_c l'énergie propre de l'onde. Les solutions de l'équation de Mathieu sont de la forme :

$$y(\tau) = \exp(\mu\tau)\phi(\tau), \quad (3.4)$$

où ϕ est une fonction π -périodique et μ l'exposant de Floquet [34]. La partie imaginaire de μ nous donne immédiatement la stabilité de l'onde plane dans le réseau. Si l'exposant de Floquet a une partie imaginaire non nulle, la solution est stable, et réciproquement si μ est réel alors l'onde plane associée n'est pas une solution stable dans le réseau. Un algorithme itératif permet de calculer la partie imaginaire de l'exposant de Floquet pour un couple (q, a) [35]. La figure (3.3) représente la stabilité de l'onde plane d'énergie cinétique $E_c = mv_0^2/2$ en fonction de la profondeur normalisée du réseau pour un réseau répulsif (figure de gauche) et attractif (figure de droite). Pour certaines énergies, il n'y a pas d'états propres, l'onde plane est instable (zone rouge). Dans la limite des faibles potentiels, l'onde plane est instable seulement pour des vitesses incidentes équivalentes de la forme $v_0 = nv_R/2$ où n est un entier. On retrouve la condition de réflexion normale de Bragg $2d \sin \theta = n\lambda_{dB}$, où $\theta = \pi/2$ et $\lambda_{dB} = h/(mv_0)$ est la longueur d'onde de Broglie associée aux atomes.

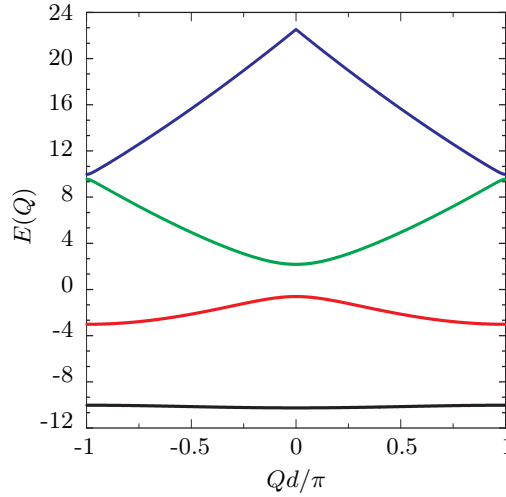


FIGURE 3.4 – Exemple de diagramme de bande.

Les zones instables du graphe de Mathieu résultent de l'existence de gap dans le spectre des énergies. D'après le théorème de Bloch, la fonction d'onde de l'équation de Schrödinger indépendante du temps (3.2), peut s'exprimer en fonction d'une fonction u de même périodicité d que le réseau $\Psi(x) = u(x)e^{iQx}$, où Q est le vecteur d'onde. En pratique les valeurs de Q sont restreintes à la première zone de Brillouin $[-\pi/d, \pi/d]$. La structure de bande s'obtient en calculant les valeurs propres de l'énergie E en fonction du vecteur d'onde Q . Les fonctions propres associées sont les états de Bloch $\Xi_{n,Q}$, où n est le numéro de la bande et Q la pseudo-impulsion. A partir du diagramme de bande, pour retrouver le diagramme de stabilité (q, v_0) , il suffit de regarder pour une hauteur donnée, si l'énergie $mv_0^2/2$ est dans un gap, dans ce cas l'onde est instable. Dans le cas contraire, s'il existe une pseudo-impulsion telle que l'énergie soit égale à l'énergie incidente de l'onde et l'onde est stable. Les zones de stabilité dans le plan (q, v_0) sont exactement identiques à celles données par l'équation de Mathieu. Dans le cas d'un réseau répulsif, il faut aussi ajouter la réflexion classique lorsque la hauteur du réseau est plus haute que l'énergie incidente, ce qui donne le lobe de réflexion gauche dans le plan (q, v_0) .

Les résultats précédents sont valables pour des réseaux infinis. Dans la suite de ce chapitre nous allons considérer les effets de réseaux d'extension finie, qui sont expérimentalement plus réalistes.

3.2.2 Réseau d'extension finie

Réflexion quantique sur un piège unique

Dans ce paragraphe, nous étudions la réflexion sur un puits unique attractif du réseau. La réflexion quantique d'une fonction d'onde sur un potentiel donné est associée à des variations rapides de la longueur d'onde de de Broglie : $\lambda_{dB} = h/mv(x)$, où v est la vitesse

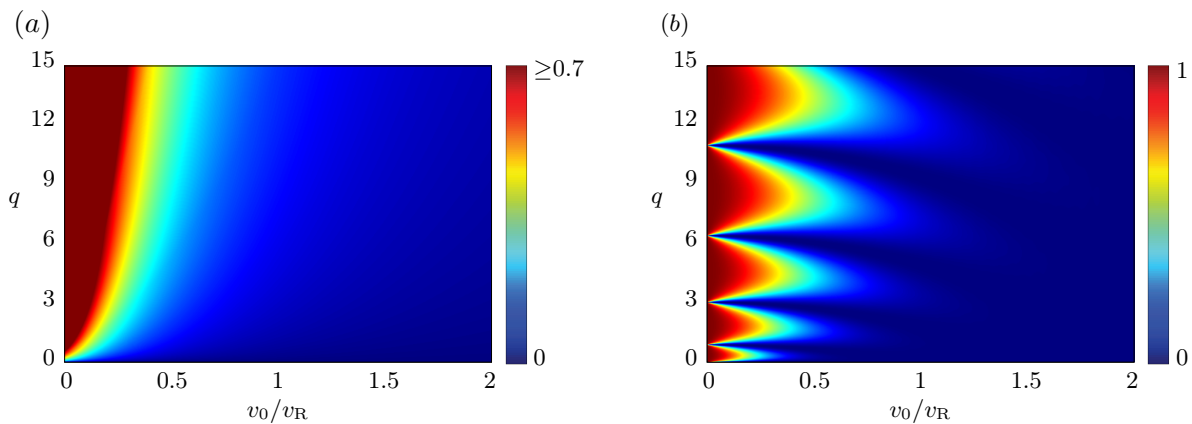


FIGURE 3.5 – (a) $\max\left(\frac{d\lambda_{dB}}{dx}\right)$ en fonction de la vitesse incidente et de la profondeur du réseau. (b) Probabilité de réflexion d'une onde plane en fonction de la vitesse incidente et de la profondeur q du puits unique.

de l'onde dans le réseau donnée par la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv^2(x) + V_{\text{réseau}}(x) = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (3.5)$$

Sur la figure (3.5 a) est représenté le maximum de $\left(\frac{d\lambda_{dB}}{dx}\right)_{\text{puits}}$ lorsque x parcourt le puits, en fonction de la vitesse incidente et de la profondeur du puits. En parallèle (b) représente, la probabilité de réflexion sur un puits unique. Il y a réflexion quantique lorsque qu'il y a variation rapide de la longueur de de Broglie de la fonction d'onde [36].

Réflexion quantique sur un réseau d'enveloppe carrée

Les résultats donnés par l'équation de Mathieu concernant la stabilité d'une onde plane d'énergie donnée dans un réseau de taille infinie. Nous testons la validité de la correspondance entre les zones d'instabilité (données par l'équation de Mathieu) et les zones de réflexion d'une onde plane d'énergie incidente en résolvant l'équation de Schrödinger stationnaire (voir appendice B). Cette méthode nous permet d'étudier les effets de taille finie du réseau et de la forme de l'enveloppe. Dans un premier temps nous regardons des réseaux attractifs d'enveloppe carrée. Les graphes de la figure (3.6) représentent la probabilité de réflexion d'une onde plane en fonction de l'énergie $mv_0^2/2$ incidente et de la profondeur q . Les graphes *b, c* et *d* comptent respectivement $N = 1, 4$ et 500 pas de réseau spatiaux (sites). Dans la limite où N tend vers l'infini, le graphe converge vers celui obtenu par l'équation de Mathieu dans le cas d'un réseau infini. Plus la vitesse incidente est importante, plus le nombre de sites nécessaires pour créer la réflexion est important. Par conséquent, en cas de réflexion, plus la vitesse incidente est importante, plus la fonction d'onde pénètre dans le réseau avant d'être réfléchi. La réflexion de Bragg se construit à partir de l'interférence constructive des ondes diffusées vers l'arrière par plusieurs sites. A

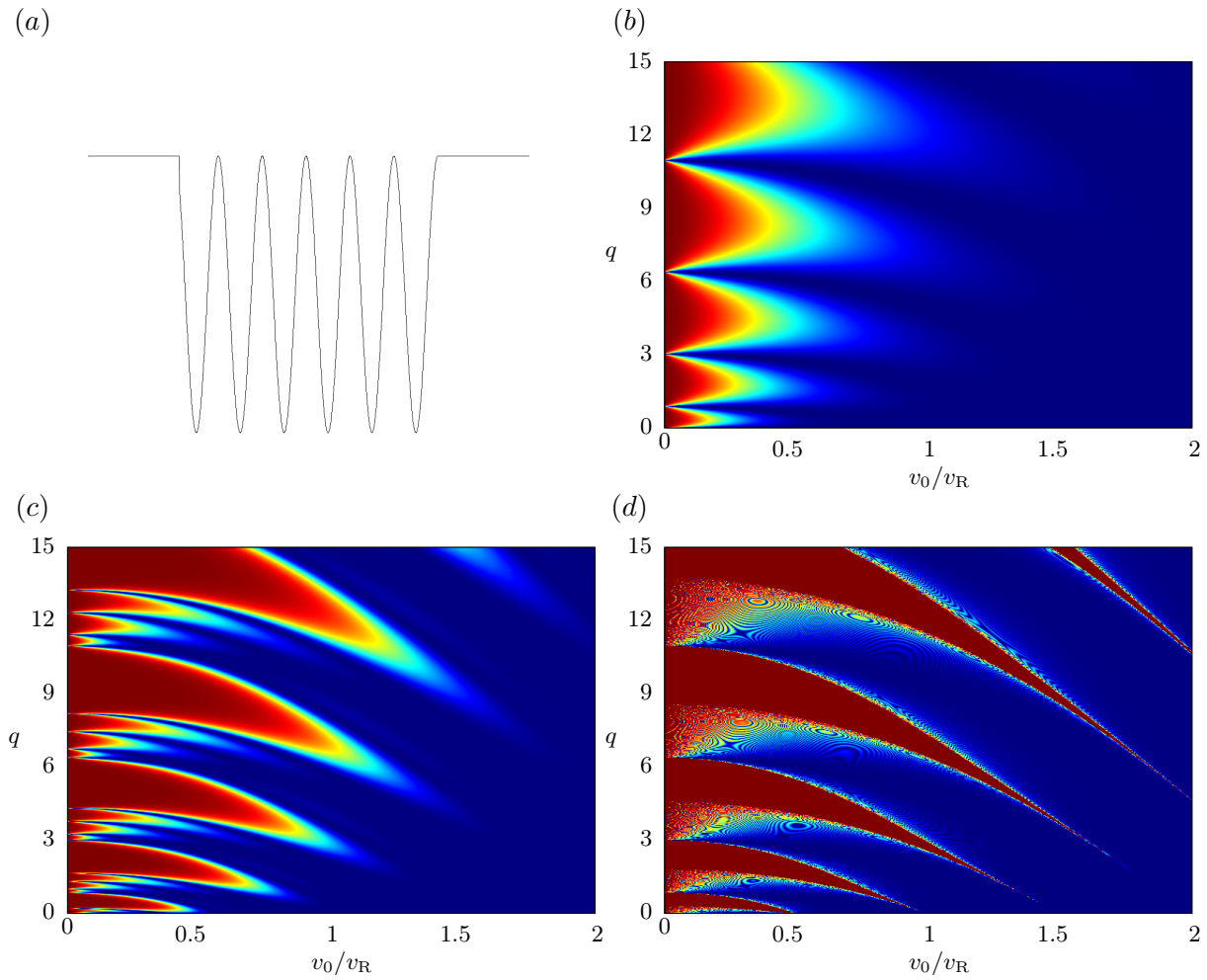


FIGURE 3.6 – (a) Réseau attractif d'enveloppe carrée $N = 6$. Probabilités de réflexion d'une onde plane sur un réseau d'enveloppe carrée de N périodes en fonction de la vitesse incidente. Ces probabilités sont calculées pour des ondes planes d'énergie $mv_0^2/2$. (b) $N = 1$; (c) $N = 4$; (d) $N = 500$.

très faible vitesse, les résonances de transmission en fonction de la profondeur se scindent en exactement N résonances dues au couplage entre sites adjacents. A chaque résonance de transmission correspond l'apparition d'un nouvel état lié du potentiel. La largeur de ces résonances varie en $1/N$. Les graphes de la figure (3.7) concernent les réseaux répulsifs. Les zones de réflexion convergent vers le résultat de l'équation de Mathieu lorsque le nombre de sites tend vers l'infini.

Réflexion quantique sur un réseau d'enveloppe gaussienne

Dans cette partie, nous prenons en compte l'enveloppe gaussienne du réseau. La fonction enveloppe s'écrit :

$$f(x) = \exp(-2x^2/w^2) \quad (3.6)$$

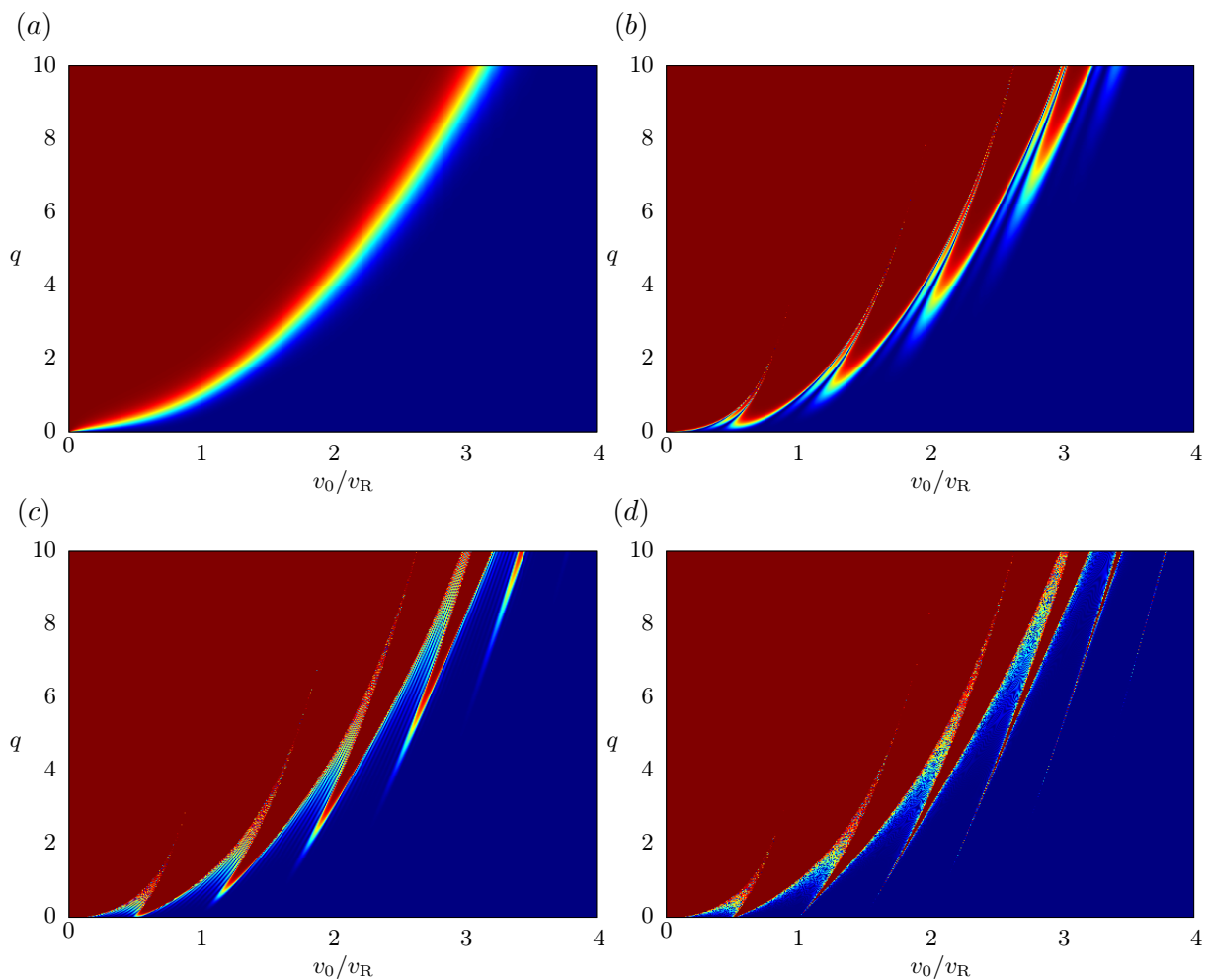


FIGURE 3.7 – Probabilités de réflexion d’une onde plane sur un réseau répulsif d’enveloppe carré de N périodes en fonction de la vitesse incidente. Ces probabilités sont calculées pour des ondes planes d’énergie $mv_0^2/2$. (a) $N = 1$; (b) $N = 3$; (c) $N = 10$; (d) $N = 500$.

où w est le waist. Dans le cas d’une enveloppe gaussienne qui varie lentement devant la taille d’un site $w \gg d$, la profondeur du réseau ne varie pas sensiblement sur plusieurs sites et l’on peut considérer que l’onde de matière interagit localement avec un réseau d’amplitude constante. L’enveloppe gaussienne, d’un réseau d’amplitude q , a pour principal effet de présenter à l’onde incidente toutes les amplitudes U inférieures à q . Par conséquent, une onde incidente de vitesse v_0 est réfléchié s’il existe une profondeur U inférieure à q telle que le couple (U, v_0) donne une réflexion de Bragg. Les figures (3.8) et (3.9) montrent la construction correspondante du motif de réflexion pour des réseaux respectivement attractifs et répulsifs pour différents nombres de sites dans le réseau. Nous avons vu dans le paragraphe précédent, que plus la vitesse incidente est élevée, plus le nombre de sites explorés pour réaliser la réflexion est important, nous retrouvons ce résultat sur les graphes (q, k_0) pour un réseau avec une enveloppe gaussienne. L’effet de l’enveloppe est plus visible à faible vitesse où il suffit de très peu de puits pour construire la réflexion, principalement

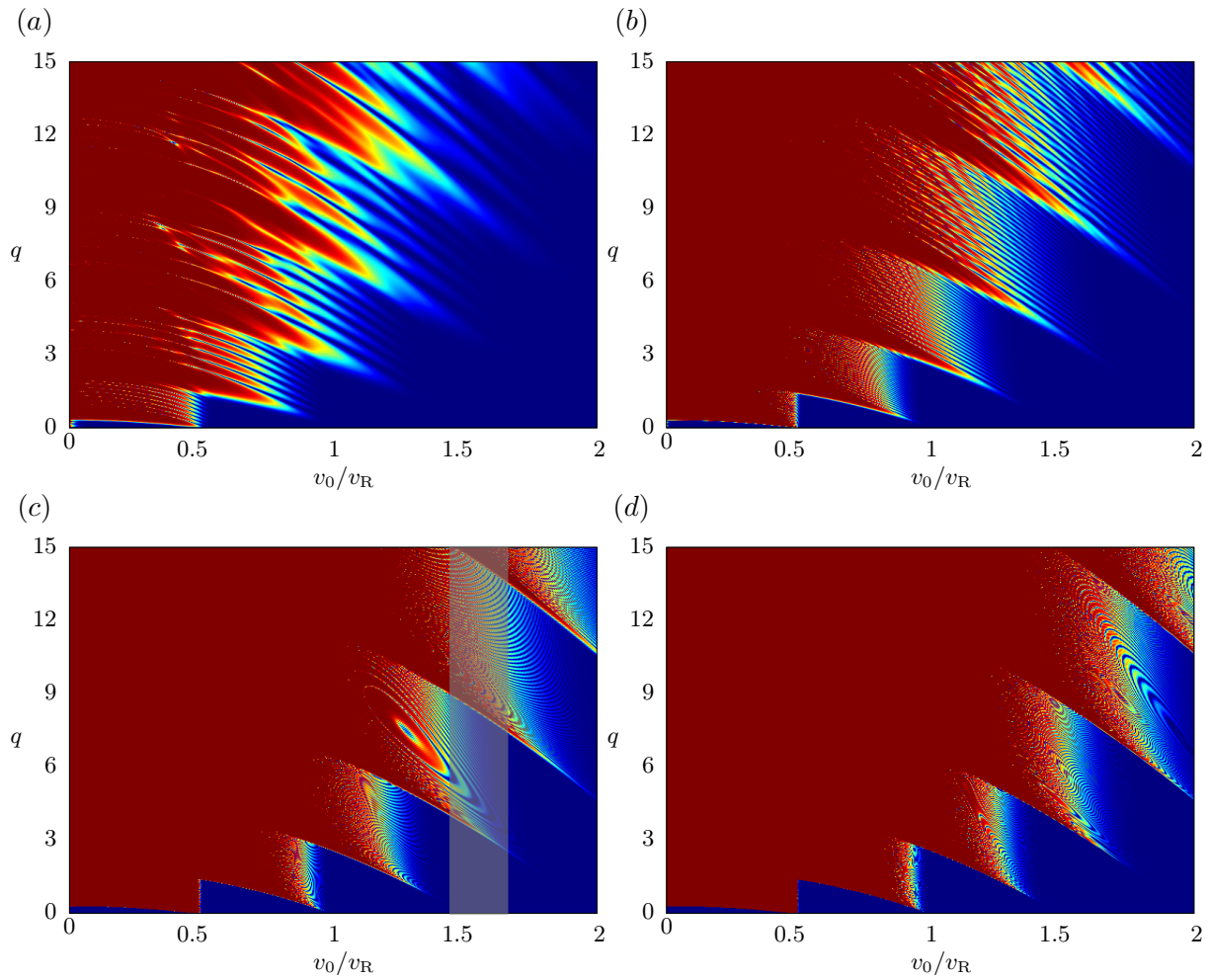


FIGURE 3.8 – Coefficients de réflexion d'une onde plane sur un réseau attractif d'enveloppe gaussienne (a) $w = 5 \mu m$, (b) $w = 20 \mu m$, (c) $w = 140 \mu m$, (d) et $w = 500 \mu m$.

pour les réseaux attractifs (voir figure (3.6)).

3.2.3 Interprétation de la réflexion de Bragg en termes de phase cumulée

Dans cette partie, nous nous intéressons à une interprétation physique de la réflexion de l'onde atomique par le réseau. D'un point de vue ondulatoire, la réflexion de Bragg est engendrée par les interférences constructives de chacun des puits du réseau [37]. De cette interprétation, nous pouvons en déduire le centre des bandes de réflexion. Il y a réflexion lorsque toutes les ondes réfléchies de chacun des puits interfèrent constructivement. En écrivant que deux ondes réfléchies par deux puits consécutifs sont en phase, nous en déduisons la condition de réflexion. Concrètement, nous faisons l'hypothèse que la fonction d'onde suit adiabatiquement le potentiel, le vecteur d'onde local dans le potentiel s'écrit alors

$$K_r(x) = k_0 \sqrt{1 - \frac{2mV(x)}{\hbar^2 k_0^2}}. \quad (3.7)$$

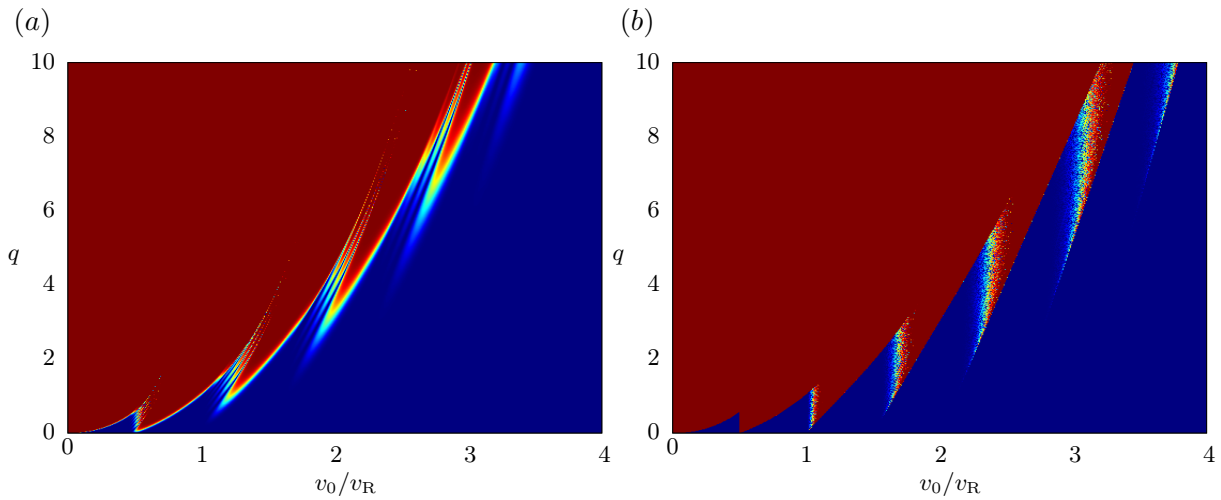


FIGURE 3.9 – Coefficients de réflexion d'une onde plane sur un réseau répulsif d'enveloppe gaussienne (a) $w = 5 \mu m$, (b) $w = 1200 \mu m$.

Le retard de phase accumulée d'une onde après une période du réseau $d = \pi/k$ par rapport à une onde réfléchie au motif précédent est :

$$\Phi_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{k}} K_r(x) dx. \quad (3.8)$$

Il y a réflexion lorsque les deux ondes réfléchies (avant et après le puits) interfèrent constructivement : $\Phi_1 = 2n\pi$, avec n entier. Sur la figure (3.10) est tracé la distance de Φ_1 à l'entier le plus proche : $|\Phi_1 - \text{int}(\Phi_1)|$, où la fonction int est la partie entière. Le jeu de couleur est choisi de façon à ce qu'un point clair corresponde à un point pour lequel $\Phi_1(k_0, q)$ soit très proche d'un nombre entier et par conséquent, à ce que l'onde plane associée soit fortement réfléchie. Chaque bande blanche correspond à un n donné. Il faut cependant aussi tenir compte du fait que K_r peut être complexe, lorsque la hauteur du réseau est supérieure à l'énergie incidente ce qui donne par conséquent la zone de réflexion classique dans le cas du réseau répulsif. Ce graphe est à comparer à celui obtenu dans le cas d'un réseau infini (3.3). Cette approche redonne parfaitement le centre des bandes de réflexion.

L'analyse par ondes planes, nous donne le comportement pour une onde d'une énergie incidente donnée. Dans les parties suivantes, nous allons considérer les effets de la dispersion en énergie du paquet d'onde atomique afin de rendre compte plus précisément des observations expérimentales [31]. Nous allons nous restreindre au cas des réseaux attractifs, que nous avons mis en place sur notre expérience.

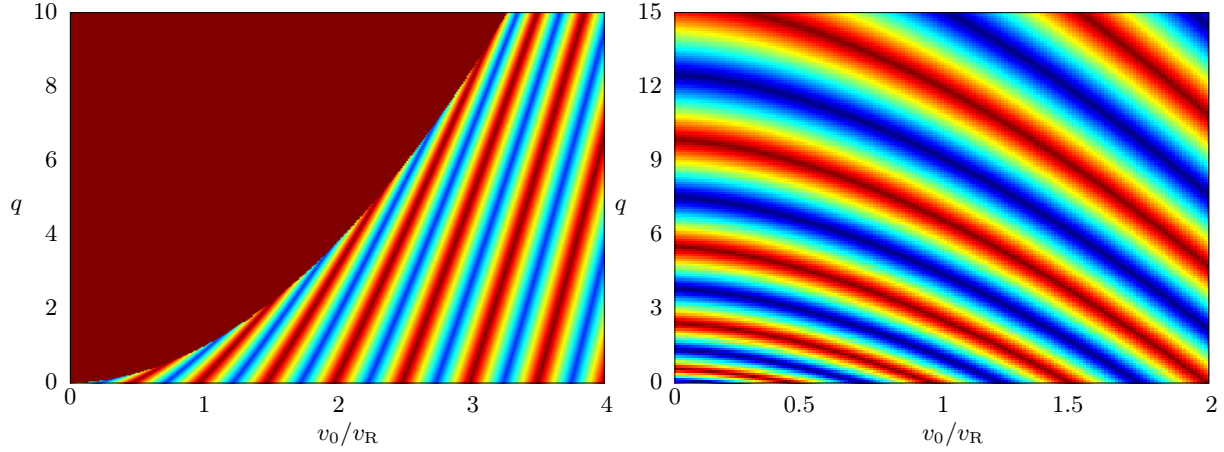


FIGURE 3.10 – Distance de $\Phi_1/2\pi$ à l'entier le plus proche dans le cas d'un réseau répulsif (à gauche) et attractif (à droite). Les zones rouges correspondent à des zones où $\Phi_1/2\pi(k_0, q)$ est proche d'un entier et par conséquent à des zones de réflexion.

3.3 Dynamique d'un paquet d'ondes sur réseau attractif d'enveloppe carrée

A partir de maintenant, nous allons nous intéresser à l'interaction d'un paquet d'onde avec un réseau. Par rapport aux parties précédentes, il y a deux modifications principales : le système interagissant n'est plus une onde plane, mais un paquet d'onde avec une certaine dispersion d'énergie et donc de vitesse. Le coefficient de réflexion de la fonction d'onde est le résultat de la convolution de toutes les composantes de vitesse qui le composent. Et nous étudions la diffusion de ce paquet d'onde lorsqu'il se propage vers et dans le réseau. L'intérêt de cette partie est de présenter une étude préliminaire, dans l'optique de sonder expérimentalement un réseau optique avec un paquet d'onde atomique issu d'un condensat de Bose-Einstein.

3.3.1 Pénétrabilité du paquet atomique dans le réseau

Dans le cas d'un réseau d'enveloppe carrée, le graphe (3.6) représente la construction du motif de réflexion en fonction du nombre de sites du réseau. Nous pouvons distinguer deux régimes, un pour les faibles vitesses incidentes, inférieures à $0.5 v_R$, où il y a réflexion sur le puits unique (réflexion quantique). L'autre régime, pour des vitesses incidentes supérieures, où plus de sites sont nécessaires pour qu'il y ait une réflexion du paquet atomique (réflexion de Bragg). Ce résultat se retrouve au niveau de la dynamique du paquet d'onde, plus la vitesse incidente est élevée, plus le paquet d'onde pénètre dans le réseau avant d'être réfléchi. La figure (3.11) présente la dynamique d'un paquet d'onde dans les deux situations précédemment décrites. Dans la situation (a) : $v_0 = 0.2 v_R$ et $q = 5$; le paquet d'onde est réfléchi sur le bord du réseau. Dans la situation (b) : $v_0 = 1 v_R$ et $q = 2.8$, le paquet d'onde

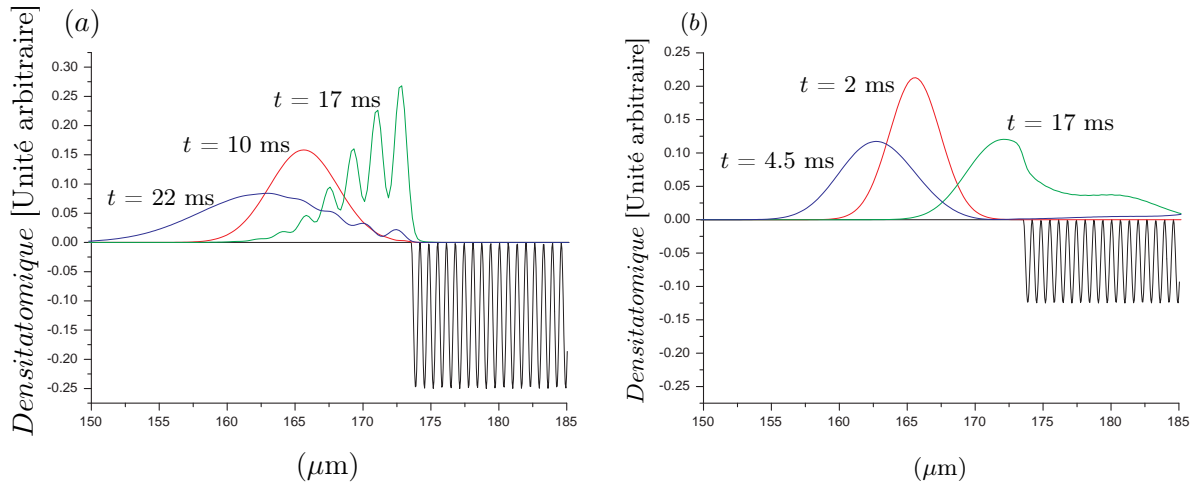


FIGURE 3.11 – *Dynamique d'un paquet d'onde atomique sur un réseau d'enveloppe carrée. Selon la hauteur du réseau et la vitesse initiale, le paquet d'onde pénètre ou pas dans le réseau avant d'être réfléchi. (a) $v_0 = 0.2 v_R$ et $q = 5$; (b) $v_0 = 1 v_R$ et $q = 2.8$.*

est réfléchi sur le réseau après une quinzaine de sites.

3.3.2 Vitesse du paquet d'onde dans le réseau

Lorsque le paquet d'onde est transmis, il traverse le réseau. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la vitesse du paquet dans le réseau. Nous considérons, dans ce paragraphe, un réseau d'enveloppe carrée. Par vitesse, nous entendons la vitesse de groupe du paquet d'onde, c'est-à-dire la vitesse du centre du paquet. La figure (3.12) représente un exemple de dynamique d'un paquet d'onde en grande partie transmis dans l'espace réel (densité de présence) et dans l'espace des vitesses (module carré de la transformée de Fourier de la fonction d'onde). La pente de la droite dans l'espace réel nous donne la vitesse du paquet d'onde que nous retrouvons dans l'espace des vitesses. Cette vitesse, n'est rien d'autre que la vitesse de groupe du paquet :

$$v = \left. \frac{dE}{dQ} \right|_{mv_0^2/2}, \quad (3.9)$$

où $E(Q)$ est le diagramme de bande du réseau infini (voir figure 3.4). Lorsqu'un paquet d'onde aborde un réseau, l'énergie cinétique initiale $mv_0^2/2$ détermine l'ordonnée du point dans le diagramme de bande. De ce diagramme, on déduit la pseudo-impulsion Q et la vitesse de groupe, qui a la valeur de la dérivée en ce point. Il y a réflexion lorsque pour l'énergie incidente, il n'y a pas de pseudo-impulsion telle que $E(Q) = mv_0^2/2$. Pour une même énergie incidente, il y a deux pseudo-impulsions possibles, le paquet d'onde se projette de telle façon que la vitesse de groupe soit de même signe que la vitesse initiale.

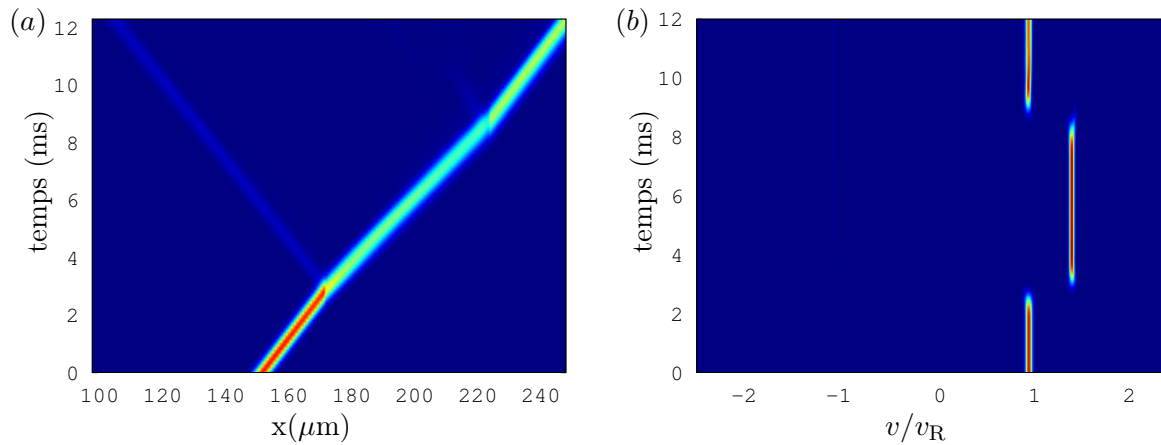


FIGURE 3.12 – *Dynamique d'un paquet d'onde atomique sur un réseau d'enveloppe carrée ($v_0 = 1 v_R$ et $q = 2.4$). Le paquet est en grande partie transmis. (a) Densité de présence dans l'espace réel; (b) densité de présence dans l'espace des vitesses (module carré de la transformée de Fourier de la fonction d'onde).*

3.3.3 Projection sur les états de Bloch

Paquet d'onde sans interactions

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la projection du paquet d'onde sur les états de Bloch lors de la propagation du paquet atomique dans un réseau d'enveloppe carrée. A partir de la diagonalisation de l'hamiltonien effectuée au paragraphe 3.2.1, nous connaissons les fonctions de Bloch $\Xi_{n,Q}$, où n est le numéro de la bande et Q la pseudo-impulsion. Or, le paquet d'onde, du fait de sa dispersion de vitesse, n'est pas infiniment fin en énergie, ce qui implique une largeur en pseudo-impulsion que nous allons considérer par la suite. Dans un premier temps, nous définissons une norme Λ_{\pm} qui mesure la projection de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ sur les états de Bloch de la bande n , tels que la pseudo-impulsion soit positive ou négative selon le signe de \pm :

$$\Lambda_{\pm}(\Psi, n) = \left| \int_{Q \gtrless} dQ \left| \int_{\text{réseau}} dx \Psi(x, t) \Xi_{n,Q} e^{iQx} \right|^2 \right|^2. \quad (3.10)$$

La figure (3.13) représente un exemple de dynamique $\Lambda_{-}(\Psi, n)$ lorsqu'un paquet traverse le réseau. La profondeur du réseau est de $q = 5$, la vitesse initiale du paquet est telle que le paquet se projette uniquement sur la bande 4. Le paquet est transmis, sa vitesse de groupe est donc positive, le paquet d'onde se projette, de telle façon que la vitesse de groupe soit positive (et par conséquent la pseudo-impulsion doit être négative pour que la vitesse de groupe soit positive). Les états de Bloch sont d'extension infinie. Concrètement, nous projetons la fonction d'onde sur l'état de Bloch associé au réseau infini.

La figure (3.14) représente, avec les mêmes paramètres, la projection à un instant donné où la fonction d'onde est dans le réseau la projection en fonction de la pseudo-impulsion. Cette largeur tire son origine du fait que le paquet a une largeur en énergie δE . A partir

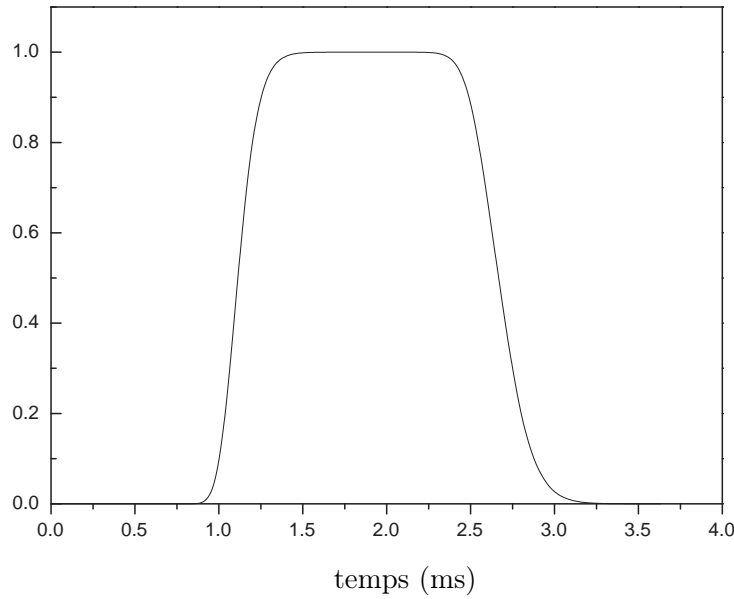


FIGURE 3.13 – *Dynamique de la projection de la fonction d'onde intégrée sur les différentes pseudo-impulsions négatives de la bande 4 : $\Lambda_-(\Psi, 4)$. Le réseau est d'enveloppe carrée, la profondeur est de $q = 5$. La vitesse initiale du paquet est telle que le paquet se projette uniquement sur la bande 4. Dans cette configuration, le paquet est transmis. La dispersion de vitesse du paquet d'onde est de $\Delta v = 0.6 \text{ mm.s}^{-1}$.*

de la valeur de la vitesse de groupe, il est possible de déduire un ordre de grandeur de la largeur occupée de la pseudo-impulsion δQ sur la première zone de Brillouin :

$$\delta Q = \delta E_0 \left(\left. \frac{dE}{dQ} \right|_{E_0} \right)^{-1}, \quad (3.11)$$

où E_0 est l'énergie cinétique initiale et δE_0 la dispersion d'énergie due à la dispersion de vitesse du paquet atomique.

Paquet d'onde en présence d'interactions inter-atomique

Dans le cas d'un paquet d'onde en présence d'interaction, la dispersion de vitesse augmente et il y a la possibilité d'un peuplement des bandes adjacentes. La figure (3.15) reprend les mêmes paramètres que la figure (3.13) et compare les projections de la fonction d'onde intégrée sur les différentes pseudo-impulsions pour la bande $(4, Q < 0)$ et les bandes adjacentes $(3, Q > 0)$ et $(5, Q > 0)$. Les interactions ont bien pour effets, sur cet exemple, d'élargir la largeur peuplée δQ et de peupler les bandes adjacentes.

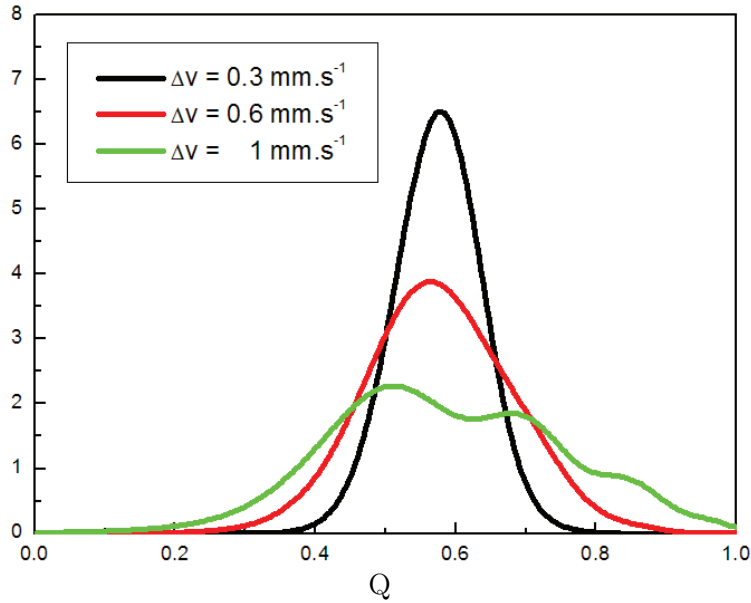


FIGURE 3.14 – *Projection de la fonction d'onde sur les états de Bloch en fonction de la pseudo-impulsion. Les paramètres du réseau et du paquet d'onde sont identiques à ceux utilisés dans la simulation de la figure (3.13).*

3.4 Dynamique d'un paquet d'ondes sur réseau attractif d'enveloppe gaussienne

3.4.1 Pseudo état de Bloch

Lorsque le paquet d'onde atomique aborde un réseau d'enveloppe gaussienne, l'extension de la fonction d'onde dans le réseau est plus grande en générale que taille typique de variation du réseau. Il n'est alors plus possible de considérer les états de Bloch infinis. Cependant, nous pouvons définir des *pseudo états de Bloch* en sectionnant le réseau en parties sur lesquelles l'amplitude varie relativement peu. Par exemple, pour un réseau tel que $q = 2$, $d = 0.65 \mu\text{m}$ et de waist de $140 \mu\text{m}$ (paramètres expérimentaux), nous avons choisi de considérer les pseudo états de Bloch sur une taille moyenne de 10 sites. Les résultats étaient sensiblement identiques sur une marge allant de 5 à 20 sites. Un avantage considérable de ces pseudo états de Bloch est qu'ils donnent une information sur la dynamique locale, ce qui nous permet de remonter à l'endroit de la réflexion. La position dans le réseau θ_1 est repérée par la distance au centre du réseau adimensionnée par le waist. La projection sur un pseudo état de Bloch s'écrit :

$$\tilde{\Lambda}_{\pm}(\Psi, n, \theta) = \left| \int_{Q \geq 0} dQ \left| \int_{10 \text{ sites autour de } \theta_1} dx \Psi(x, t) \Xi_{n, Q} e^{iQx} \right|^2 \right|^2. \quad (3.12)$$

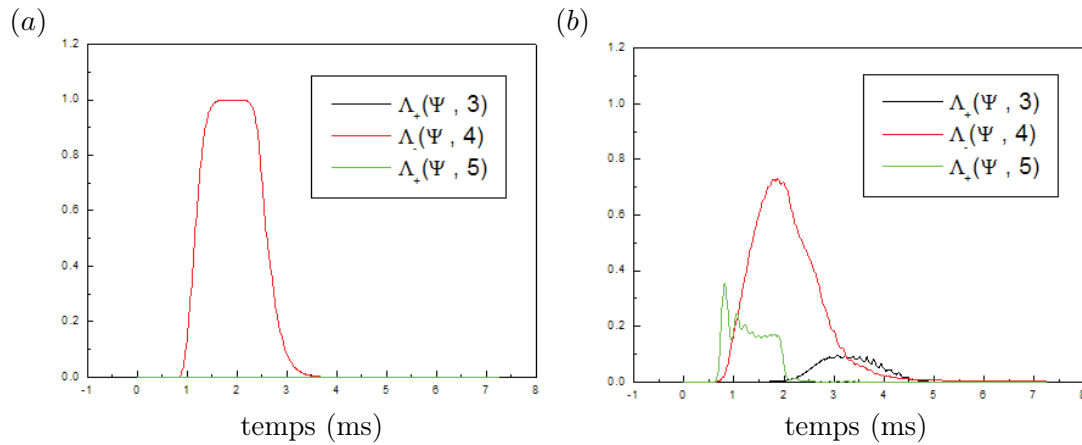


FIGURE 3.15 – Dynamique de la projection de la fonction d'onde intégrée sur les différentes pseudo-impulsions $\Lambda_+(\Psi, 3), \Lambda_-(\Psi, 4), \Lambda_+(\Psi, 5)$ pour (a) un paquet d'onde sans interactions et (b) en présence d'interactions, la force des interactions est $g_1 N_0 = 60 \hbar^{3/2} m^{-1/2} s^{1/2}$.

3.4.2 Transition Landau-Zener

La figure (3.16) représente un exemple de projection de la fonction d'onde sur les pseudo-états de Bloch à deux endroits du réseau ($\theta_1 = 1$ et 0.5). Lorsque la fonction d'onde aborde le réseau en $\theta_1 = 1$, le réseau est de faible amplitude, la fonction d'onde se projette sur la bande 3 avec une pseudo-impulsion positive. En $\theta_1 = 0.5$, le réseau est plus profond, l'énergie cinétique initiale correspond à la bande 4 avec une pseudo-impulsion négative de telle façon que la vitesse de groupe soit positive. Lorsque le paquet d'onde passe d'une bande à l'autre, le point figuratif sur le diagramme de bande traverse un gap où il n'y a aucune bande autorisée, ce qui devrait entraîner une réflexion du paquet. Cependant, si la bande interdite est relativement étroite, il existe une probabilité dite de Landau-Zener, que le paquet passe sur la bande supérieure autorisée. Plus les bandes sont élevées, plus les bandes interdites sont relativement petites, et plus la transition de passage Landau-Zener est importante.

3.4.3 Effet de la dispersion de vitesse du paquet d'onde

Un paquet d'onde avec une certaine dispersion de vitesse présente plusieurs classes de vitesse. Chacune de ces classes de vitesse va interagir différemment avec le réseau et être réfléchi, ou pas. La figure (3.17) représente un exemple de dynamique, où une classe de vitesse est réfléchi causant un trou dans la distribution transmise.

La probabilité de réflexion $\Pi(v_0, \delta v)$ du paquet d'onde de vitesse v_0 et de dispersion de vitesse δv sur le réseau, correspond au produit de convolution de la distribution des différentes composantes du paquet $\tilde{\Psi}(v_0, \Delta v)$, par la probabilité de réflexion $\Pi_{\text{Onde plane}}(v_0)$ d'une onde plane de vitesse v_0 :

$$\Pi(v_0, \Delta v) = \Pi_{\text{Onde plane}}(v_0) * \tilde{\Psi}(v_0, \Delta v). \quad (3.13)$$

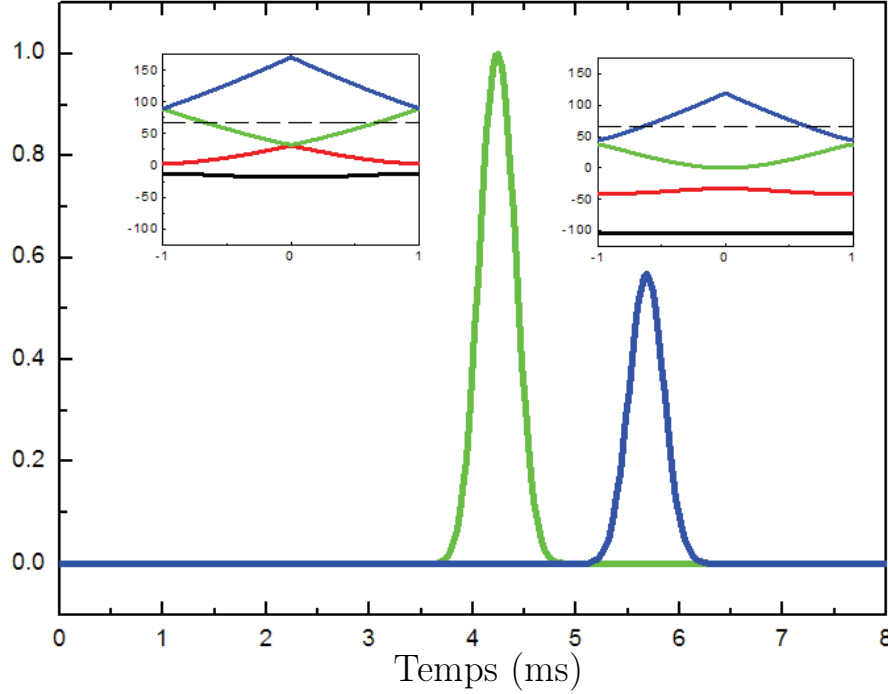


FIGURE 3.16 – *Dynamique de la projection de la fonction d'onde sur les pseudo-états de Bloch. En vert, $\tilde{\Lambda}_+(\Psi, 3, \theta_1 = 1)$, en bleu $\tilde{\Lambda}_-(\Psi, 4, \theta_1 = 0.5)$. Seules sont représentées les projections qui ont une valeur significative. Le réseau est d'enveloppe gaussienne, la profondeur est de $q = 5$ et le waist de $140 \mu\text{m}$. En encadrés, les diagrammes de bandes associées aux pseudo-états de Bloch locaux. La ligne en pointillé correspond à l'énergie cinétique initiale. La vitesse initiale du paquet est telle que le paquet se projette uniquement sur la bande 4 lorsque le paquet est au centre du réseau. Dans cette configuration, le paquet est transmis. La dispersion de vitesse du paquet d'onde est de $\Delta v = 0.6 \text{ mm.s}^{-1}$.*

La figure (3.18 (a)) représente le diagramme de réflexion (v_0, q) pour un paquet d'onde de dispersion de vitesse de 0.5 mm.s^{-1} . Tous les motifs plus fins que la dispersion de vitesse sont gommés. La figure (b) représente une coupe pour une profondeur $q = 2$. La figure (3.19) compare pour une dispersion de vitesse donnée $\Delta v(t) = 0.1 \text{ mm.s}^{-1}$, la probabilité de réflexion convoluée avec la distribution de vitesse du paquet d'onde, pour une onde plane et la probabilité pour ce même paquet d'onde. L'accord est satisfaisant et est valable pour toutes les dispersions de vitesse représentées sur la figure (3.17).

3.5 Comparaison à l'expérience

3.5.1 Analyse de la dynamique pour une profondeur donnée

Les premières expériences ont été réalisées pour une profondeur $q = 11$. Le paquet d'onde atomique est placé à $350 \mu\text{m}$ du centre du réseau. L'expérience comporte une première phase de découplage des atomes du potentiel piège, la dispersion mesurée du paquet

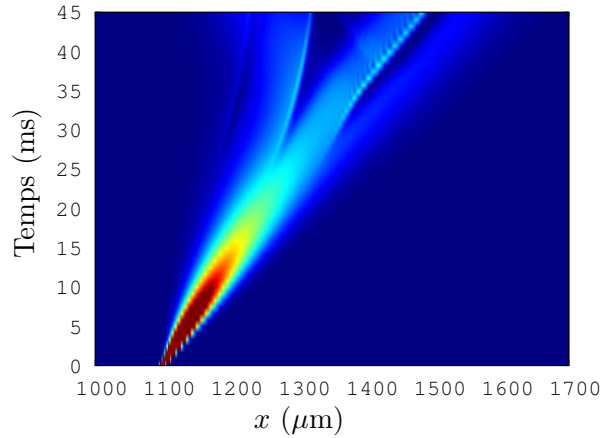


FIGURE 3.17 – Dynamique dans l'espace réel d'un paquet d'ondes de vitesse initiale $v_0 = 1 v_R$ (7 mm.s^{-1}) et de dispersion en vitesse $\Delta v(t) = 2.0 \text{ mm.s}^{-1}$ sur un réseau attractif avec d'enveloppe gaussienne de waist $140 \mu\text{m}$ et de profondeur $q = 2$. Chaque classe de vitesse composant le paquet interagit différemment avec le réseau. Dans ce cas, une classe de vitesse est réfléchi, ce qui entraîne un trou dans la distribution transmise.

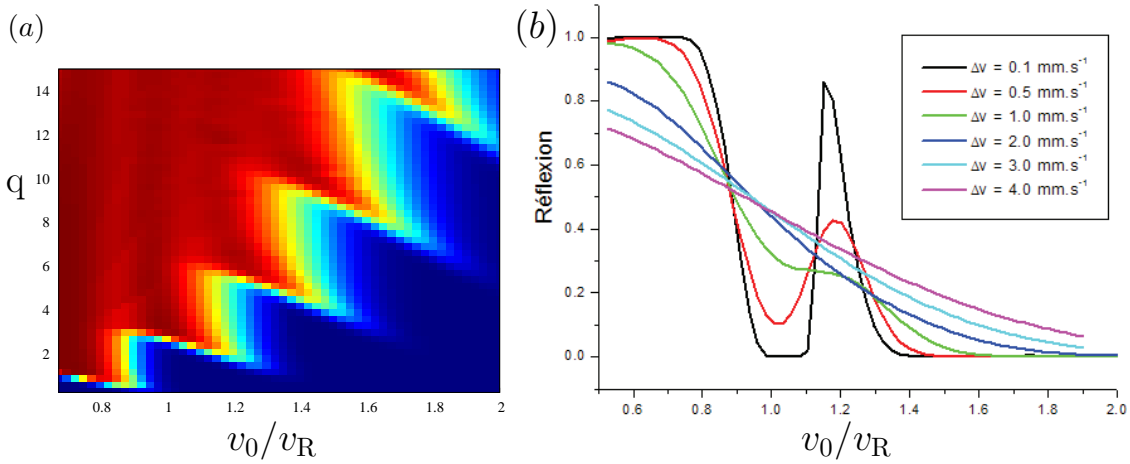


FIGURE 3.18 – (a) Coefficients de réflexion d'un paquet d'ondes de vitesse initiale v_0 et dispersion en vitesse $\Delta v(t) = 0.05 v_R \simeq 0.5 \text{ mm.s}^{-1}$ sur un réseau attractif avec une enveloppe gaussienne de waist $140 \mu\text{m}$. (b) Coupe du précédent diagramme en $q = 2$ pour différentes dispersions de vitesse.

d'onde est de $\Delta v = 1.7 \text{ mm.s}^{-1}$. Ensuite, les atomes sont accélérés dans le guide jusqu'à une vitesse moyenne $v_0 = 11.2 \text{ mm/s}$ et restent dans celui-ci durant tout le temps t_{prop} d'interaction avec le réseau. Les images sont prises par absorption après un temps de vol de 10 ms , ce qui permet de remonter au module carré de la fonction d'onde. Les images ont une résolution optique de l'ordre de $10 \mu\text{m}$. La technique d'imagerie par absorption est destructive, chaque image est la moyenne de 8 images chacune issue d'une expérience de diffusion du paquet atomique sur le réseau réalisées dans les mêmes conditions. La figure (3.20) présente la dynamique dans l'espace réel du paquet d'onde atomique en fonction du temps de propagation (a) les résultats expérimentaux et le résultat de la simulation équi-

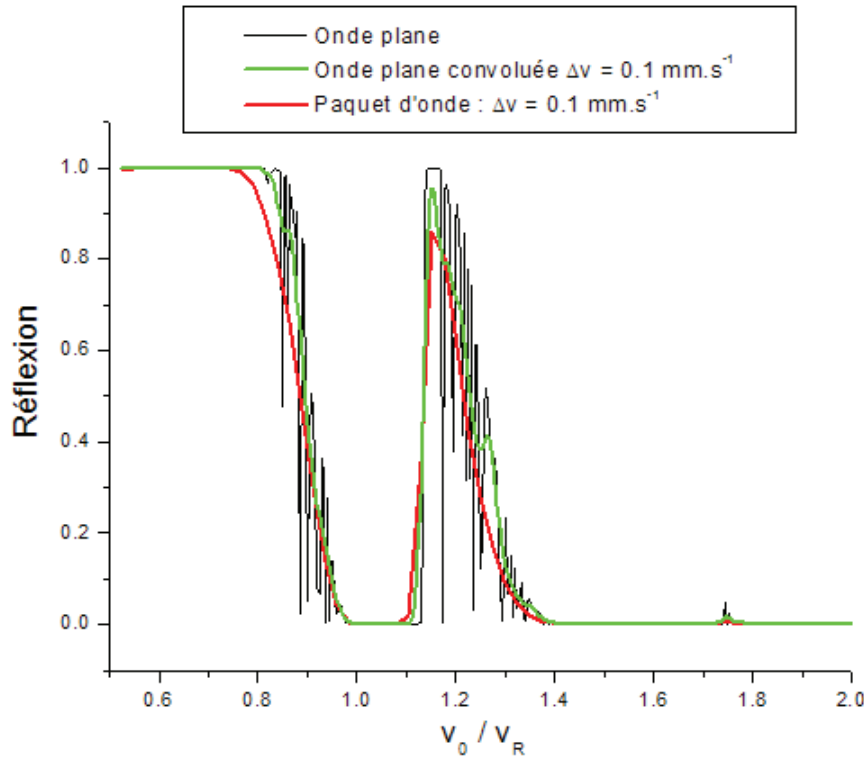


FIGURE 3.19 – Coefficients de réflexion en fonction de la vitesse initiale v_0 sur un réseau attractif d'enveloppe gaussienne de waist $140 \mu\text{m}$. En noir, pour une onde plane. En vert, le résultat de l'onde plane est convoluée par une dispersion en vitesse $\Delta v = 0.1 \text{ mm.s}^{-1}$. En rouge, pour un paquet d'onde de dispersion de vitesse $\Delta v = 0.1 \text{ mm.s}^{-1}$. Le coefficient de réflexion pour un paquet d'onde de dispersion de vitesse donnée est la convolution de la réflexion de l'onde plane.

valente avec prise en compte de la résolution optique (convolution de la densité atomique avec une gaussienne de largeur $10 \mu\text{m}$) et du temps de vol. Cependant, la simulation est à une dimension, chaque image a été élargie sur huit pixels avec une pondération gaussienne pour un rendu 2d. La ligne en tiret représente le réseau. Le paquet se propage vers le réseau en s'étalant jusqu'à 20 ms, où il interagit avec le réseau en continuant à s'étaler. A partir de 40 ms, on distingue deux paquets nettement séparés, l'un réfléchi et l'autre transmis. Ce résultat constitue la démonstration d'un miroir de Bragg² pour une onde de matière. En effet, la succession des couches diélectriques est ici réalisé par une succession de feuillets lumineux non-résonants. La condition de longueur d'onde est l'équivalent d'une condition en vitesse sur les composantes du paquet atomique incident. Le lien entre ces deux quantités est donné par la relation de de Broglie $\lambda = h/mv$. Pour plus de précisions sur le pendant optique des miroirs de Bragg et le dispositif expérimental, nous invitons le lecteur à consulter la thèse de Charlotte Fabre [38].

2. En optique, un miroir de Bragg est un miroir parfait pour une longueur d'onde donnée, qui est constitué de différentes couches de matériaux diélectriques d'indice optique différents. La réflexion de l'onde incidente est le résultat d'interférences constructives.

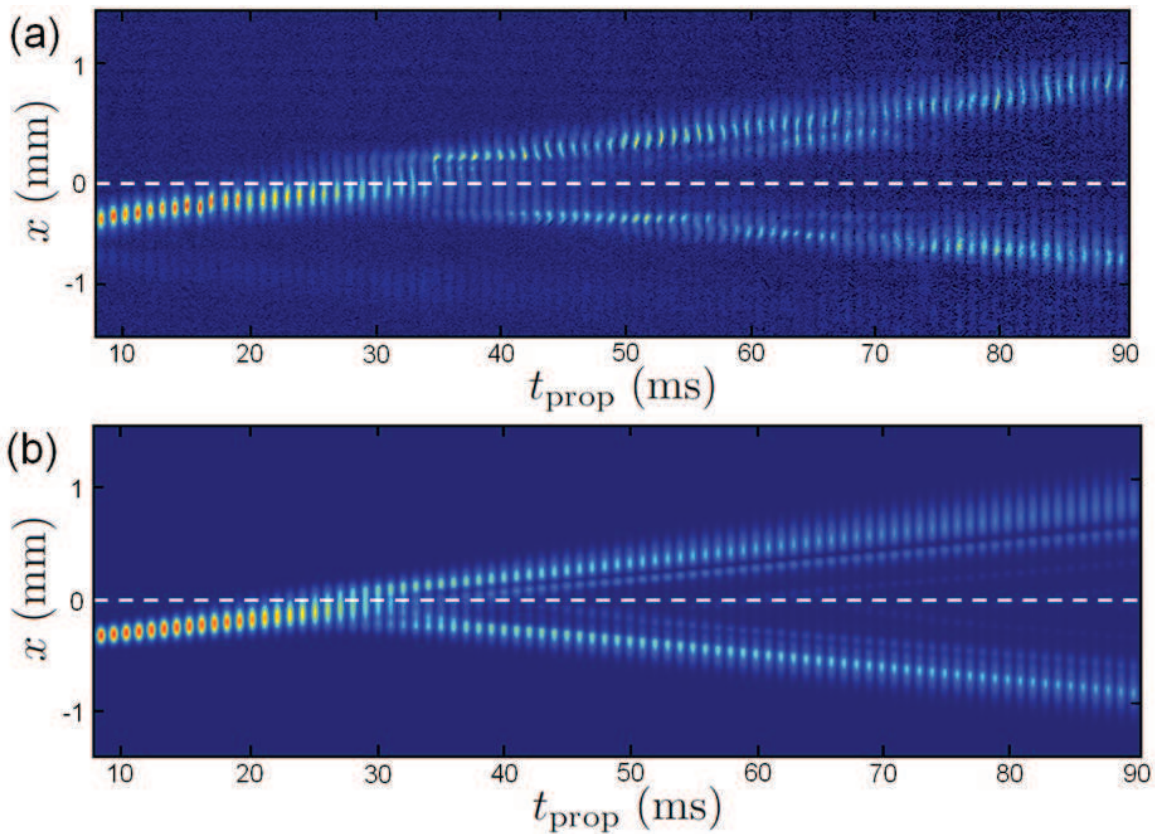


FIGURE 3.20 – *Dynamique de la densité atomique en fonction de la position x et du temps de propagation. (a) Résultats expérimentaux, (b) Simulation numérique à une dimension. La ligne en pointillés représente la position du réseau.*

3.5.2 Analyse en fonction de la profondeur

Il n'est pas possible dans le cas de notre expérience d'obtenir des paquets d'onde de dispersion de vitesse de moins de 1.7 mm.s^{-1} en dépit du protocole d'ouverture adiabatique adopté dans la procédure expérimentale. Or les motifs que l'on souhaite sonder sur le graphe "onde plane" (3.3) ont des largeurs typiques de l'ordre de $0.1 v_R$, soit de l'ordre de 0.7 mm.s^{-1} avec nos paramètres expérimentaux. Il est donc impossible de reconstruire le diagramme (v_0, q) en considérant le paquet d'onde comme une onde monocinétique dont on peut mesurer la probabilité de réflexion et de transmission. Une autre approche, dans le but de reconstruire le diagramme de stabilité (v_0, q) avec des paquets d'onde consiste à ne pas regarder uniquement la réflexion ou la transmission de la totalité de la fonction d'onde atomique, mais pour chaque classe de vitesse de la fonction d'onde. On exploite dans ce cas la corrélation position-vitesse qui se développe au cours de la propagation du paquet avant qu'il aborde le réseau. L'observable est donc la densité de présence, pour chaque composante de vitesse, on regarde s'il y a transmission. Ainsi, avec une seule expérience, on n'obtient pas la réponse pour uniquement la vitesse moyenne, mais pour toutes les vitesses comprises dans l'intervalle de dispersion de vitesse. De cette manière, en reprenant l'expérience précédente

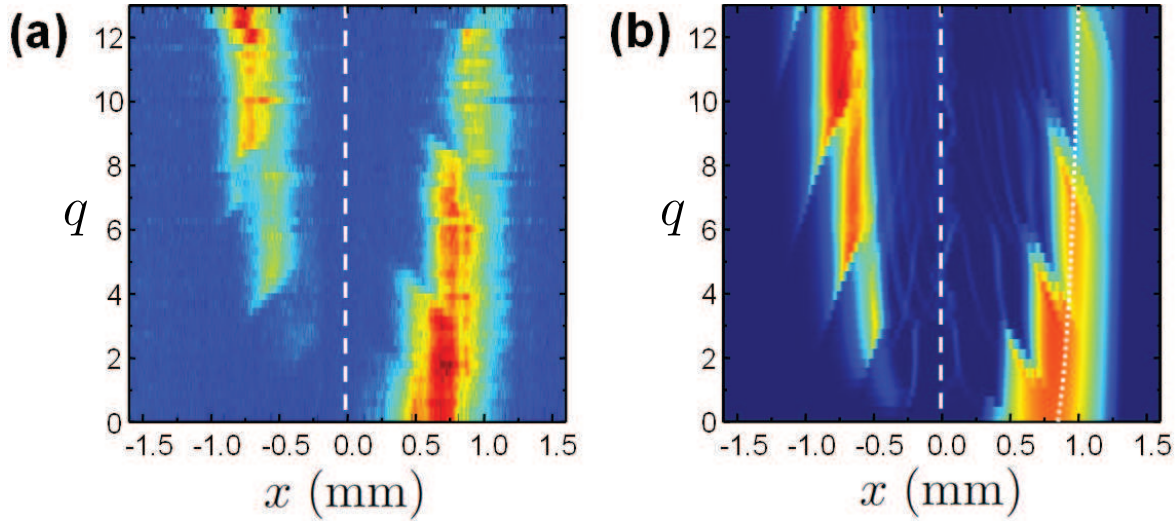


FIGURE 3.21 – (a) *Résultats expérimentaux.* (b) *Résultats des simulations numériques de la densité atomique du paquet d'onde en fonction de la position et de la profondeur. La ligne en pointillés au centre symbolise à la position du réseau. À gauche la partie réfléchie et à droite la partie transmise.*

avec un temps de propagation de 100 ms pour différentes profondeurs q , on obtient le diagramme suivant (3.21). Il n'y a aucun paramètre ajustable, l'accord entre l'expérience et la théorie est bon. La ligne en tiret correspond à la position du réseau. Sur chaque figure, à gauche la partie réfléchie, à droite la partie transmise. Dans la partie transmise, il y a des trous qui correspondent à des classes de vitesse réfléchies. Sur la partie transmise, on retrouve les formes de dents des diagrammes des coefficients de réflexion pour une onde plane. L'hypothèse fondamentale est que la distribution spatiale de la fonction d'onde traduise linéairement la distribution de vitesse. Ce qui est justifié pour la partie transmise lorsque la taille initiale de la distribution spatiale est négligeable devant la taille finale. Dans cette optique, la partie transmise correspond exactement à la partie grisée sur le diagramme des coefficients de réflexion pour une onde plane (3.8). Ces trous dans la distribution finale de densité, sont des signatures de la structure de bande du réseau. En effet, les classes de vitesses correspondantes et donc à des énergies incidentes se trouvent dans des bandes interdites.

Par ailleurs, il est aussi possible de voir l'action du réseau comme un filtre coupe-bande en vitesse. En effet, pour une profondeur donnée, le trou dans la densité atomique après interaction avec le réseau, indique qu'une classe de vitesse a été réfléchie. Cependant ce filtre est très peu ajustable.

Conclusion

Dans ce chapitre, après un rappel de la physique de l'équation de Mathieu, nous avons étudié les réseaux d'extension spatiale finie et principalement les effets de l'enveloppe du réseau. Nous avons montré comment il est possible de sonder la structure de bande d'un réseau optique avec une expérience de diffusion. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [31].

L'étude de la transmission de chaque classe de vitesse nous a permis de contourner la limite imposée par la dispersion de vitesse. Dans le chapitre (6), nous présenterons une autre méthode pour sonder des motifs de transmission plus fins que la dispersion de vitesse du paquet d'onde.

La réflexion de Bragg d'un paquet atomique constitue un filtre sélectif en vitesse. Cependant, ce filtre ne possède que la profondeur pour ajuster la réflexion. Dans les chapitres suivants, nous allons présenter deux moyens, pour modifier et contrôler la réflexion : changer la force du confinement transverse et nous autoriser des réseaux dépendant du temps.

Chapitre 4

Diffusion sur un réseau dépendant du temps

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré le lien entre la diffusion d'un paquet atomique sur un réseau et la structure de bande du réseau ; nous avons proposé d'utiliser le réseau comme un filtre de vitesse. Cependant, le seul paramètre de contrôle que nous avions, était la profondeur du réseau. Dans ce chapitre, nous étudions la diffusion de paquets atomiques sur des réseaux dépendant du temps. Nous présentons quelques résultats de diffusion sur des réseaux dont soit le motif se déplace à vitesse constante, soit l'amplitude est modulée au cours du temps. Nous présenterons des applications : la possibilité de réaliser une diode pour onde de matière, ou encore un filtre de vitesse que notre équipe a pu réaliser expérimentalement.

4.1 Modulation d'intensité

Dans cette partie, nous étudions la diffusion d'un paquet d'onde atomique sur un réseau dont l'amplitude est modulée. Dans un premier temps, nous considérons la réflexion sur un réseau d'enveloppe carrée dont l'amplitude est modulée (schéma 4.1 a)). A partir de ce cas simple, nous présenterons *les mécanismes de réflexion qui reposent sur des transitions inter-bandes*. Nous présenterons ensuite les résultats expérimentaux et leur analyse en termes de pseudo-états de Bloch. Nous proposerons enfin un filtre de vitesses au moyen d'une modulation à double fréquence, réalisé expérimentalement dans l'équipe [39]. Le potentiel modélisé du réseau modulé s'écrit :

$$V(x, t) = -2qE_R [1 + \sin(2kx)] (1 - A \cos(2\pi\nu t)) f(x) \quad (4.1)$$

où ν est la fréquence de modulation, A l'amplitude de modulation et f la fonction enveloppe du réseau. L'amplitude typique de modulation utilisée expérimentalement est de l'ordre

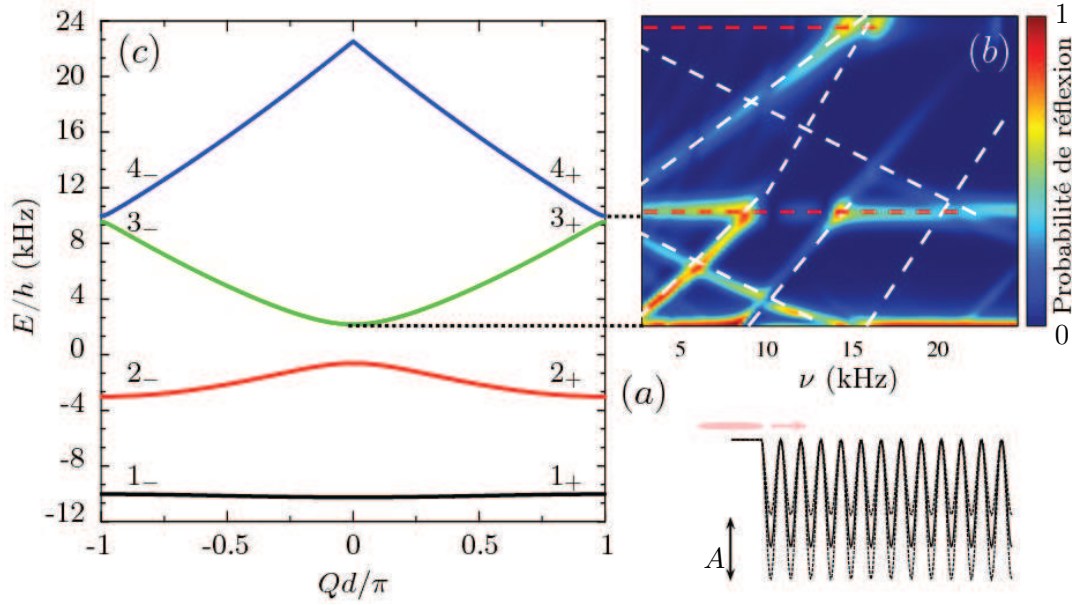


FIGURE 4.1 – (a) Schéma de principe de la diffusion sur un réseau modulé. A est l'amplitude de modulation. (b) Probabilité de réflexion sur un réseau carré en fonction de l'énergie incidente et de la fréquence de modulation ν . Les lignes blanches en pointillés correspondent à des transitions possibles entre bandes par absorption ou émission de quanta d'énergie $h\nu$. (c) Diagramme de bande ($A = 0$) du réseau. Les indices \pm des bandes correspondent au signe de la pseudo-impulsion Q .

de 30% et les fréquences de modulations utilisées sont entre 1 et 30 kHz. Le détail des caractéristiques du réseau sont données dans le chapitre sur les réseaux statiques (3), paragraphe (3.1.1).

4.1.1 Première approche : réseau d'enveloppe carrée

Analyse en termes de transitions inter-bandes

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas simple d'un réseau d'enveloppe carrée de profondeur q , modulé à la fréquence ν avec une amplitude A . La figure (4.1 b) représente la probabilité de réflexion d'un paquet d'onde en fonction de l'énergie incidente E et de la fréquence de modulation ν , calculée au moyen d'une simulation 1d, qui résout l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Le paquet d'onde a une dispersion de vitesse de 0.2 mm.s^{-1} , le réseau a une longueur de 80 puits, l'amplitude de modulation est de 30 %. La partie (c) de la figure représente le diagramme de bande associé au réseau, l'échelle d'énergie (axe des ordonnées) est la même pour le diagramme de bande (c) et la probabilité de réflexion (b) de sorte que sur une même ligne horizontale d'énergie incidente donnée, nous puissions lire à la fois la bande sur laquelle le paquet se projette (voir paragraphe 3.2.1) et le coefficient de réflexion du même paquet. Sur le graphe de réflexion, nous distinguons deux types de réflexions, celles qui dépendent de cette fréquence de modulation et celles

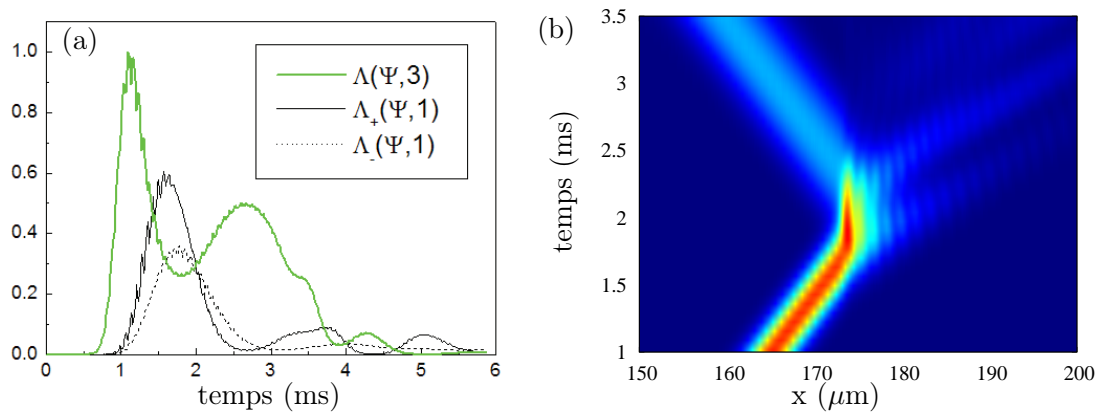


FIGURE 4.2 – *Dynamique de la diffusion du paquet d'onde sur le réseau. (a) Projections sur les différentes bandes significatives. (b) Projection dans l'espace réel. Le paquet réalise des transitions inter-bandes avant d'être majoritairement réfléchi de manière spéculaire.*

qui ne dépendent pas de la fréquence. Les lignes de réflexion horizontales correspondent aux réflexions de Bragg lorsque l'énergie incidente est dans un gap, elles ne dépendent pas de la fréquence de modulation. Les gaps entre les bandes 2 et 3 et les bandes 3 et 4 sont visibles. Les autres zones de réflexion sont dues spécifiquement à la modulation, elles forment des droites croissantes et décroissantes en fonction de la fréquence de modulation. En lignes en pointillés blancs, nous avons tracé les points (E, ν) tels que $E + h\nu$ soient sur une autre bande avec la même pseudo-impulsion Q . Autrement dit, pour une énergie incidente donnée (ligne horizontale) à chaque croisement avec une ligne en pointillés blancs, il existe une transition possible sur une autre bande assistée par un photon de modulation d'énergie $h\nu$. Toutes les réflexions sont prédites par ce modèle, cependant pour toutes les prédictions, il n'y a pas nécessairement de réflexion. En effet, plusieurs scénarios existent en fonction de la vitesse incidente :

- (i) le paquet d'onde se projette sur une bande, sa vitesse de groupe est positive. La fréquence de modulation est résonante avec la bande située exactement en dessous que nous supposons d'énergie positive. La transition s'effectue en conservant la pseudo-impulsion Q , la vitesse de groupe est maintenant négative : le paquet est réfléchi. Le paquet n'est pas piégé. Ce scénario est valable pour toutes les transitions vers des bandes d'énergie positives, telles que la vitesse de groupe soit négative.
- (ii) La fréquence de modulation est résonante avec la bande située exactement deux bandes en dessous, que nous supposons d'énergie positive (sur une telle bande, la fonction d'onde asymptotique ne peut pas y être piégée). La transition s'effectue en conservant la pseudo-impulsion Q , la vitesse de groupe est toujours négative : le paquet est transmis. Le paquet n'est pas piégé. Cependant, la vitesse du paquet est modifiée. Ce scénario est valable pour toutes les transitions vers des bandes d'énergie positives, telles que la vitesse de groupe soit positive. Ce scénario crée cependant

un trou¹ dans la densité atomique de sortie. En effet, pour les classes de vitesses non-résonnantes, il existe une corrélation entre la position dans la densité atomique de sortie et sa classe de vitesse. Les classes de vitesse concernées par ce scénario sont soit accélérées ou ralenties, elles sont déplacées dans la densité atomique de sortie.

- (iii) La fréquence de modulation est résonnante avec une bande piégée, d'énergie négative (où la fonction d'onde asymptotique y est piégée). Quelque soit le signe de la vitesse de groupe, le paquet d'onde est piégé dans le réseau. Un exemple est représenté sur la figure (4.2). La partie (a) représente la projection sur les états de Bloch, voir formule (3.10) du chapitre sur les réseaux (3), sur la bande 3, sur laquelle le paquet se projette initialement $\Lambda_{\pm}(\Psi, 3)$ et sur les deux demi bandes $\Lambda_{+}(\Psi, 1)$ et $\Lambda_{-}(\Psi, 1)$ en fonction du temps. Les projections sur les autres états de Bloch ne sont pas significatives. La fréquence de modulation est résonnante avec l'écart énergétique entre la bande 3 et 1 ; le paquet descend, par transition sur la bande 1_{+} . Il est piégé, dans le réseau, mais sa vitesse de groupe ne change pas de sens. Sur le bord du réseau, il ne peut sortir, il passe sur l'état 1_{-} et sa vitesse de groupe change de sens. Ce qui explique les populations successivement sur 1_{+} et 1_{-} à $t = 1.6$ et 1.7 ms respectivement. Par transition assistée par la modulation, il repasse sur la bande 3 à $t = 2.7$ ms. Il n'est plus piégé et peut ressortir du réseau avec la vitesse qu'il avait initialement. La réflexion est spéculaire. Seule la partie du paquet d'onde ayant la condition de résonance est réfléchi, le reste est transmis. La figure (b) représente la dynamique dans l'espace réel avec le temps en ordonnée et la coordonnée d'espace en abscisse. On y vérifie la réflexion spéculaire et le trou dans la densité atomique transmise. Le piégeage est ici transitoire.

4.1.2 Modulation d'un réseau d'enveloppe gaussienne

Dans cette partie, nous présentons et analysons les résultats expérimentaux. Nous considérons le cas d'une enveloppe gaussienne pour un réseau attractif. La fonction enveloppe f s'écrit : $\exp(-2x^2/w_0^2)$, où le waist est de $140 \mu\text{m}$.

Densité atomique en fonction de la fréquence de modulation

Le dispositif expérimental sera décrit dans la thèse de P. Cheiney et est semblable à celui du miroir de Bragg (voir chapitre 3 et la thèse de Charlotte Fabre [38]). Le réseau est obtenu par le croisement des deux faisceaux hors-résonance. La modulation est obtenue par modulateur acousto-optique placé avant la séparation du faisceau en deux bras. L'amplitude de modulation est $A = 30\%$. Nous utilisons délibérément un nuage thermique afin d'obtenir une large dispersion de vitesse du paquet d'onde incident (6 mm/s). Cela permet d'étudier la diffusion sur une large plage de vitesse. Le paquet est accéléré pendant 15 ms par un champ magnétique inhomogène jusqu'à une vitesse de 10 mm/s . Le centre du réseau est

1. Il est important de signaler, qu'à temps de propagation très long, ces trous de densité atomique disparaissent. En effet, la classe de vitesse résonnante a simplement été déplacée. A temps très long, la sur-densité atomique va s'estomper et les classes de vitesse différentes vont se reséparer.

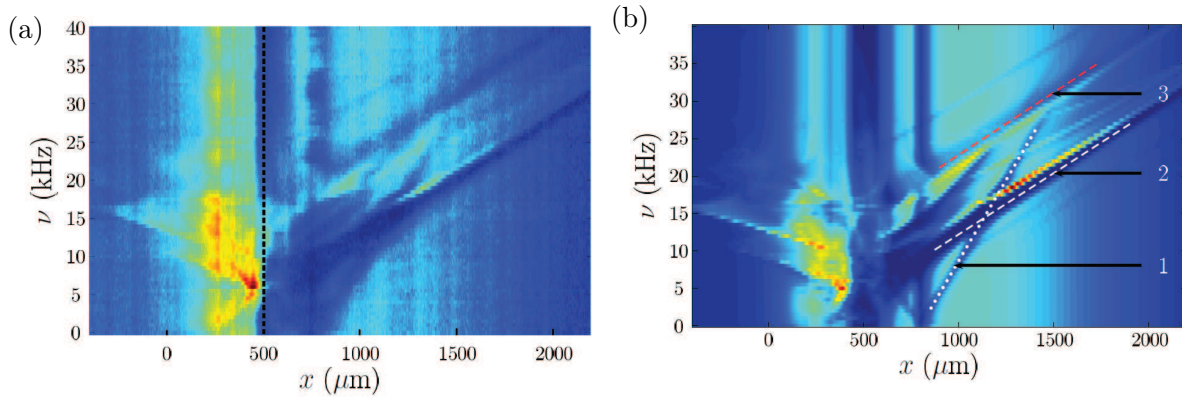


FIGURE 4.3 – *Densité atomique après diffusion sur un réseau modulé en intensité. (a) Résultat expérimental. (b) Résultat numérique.*

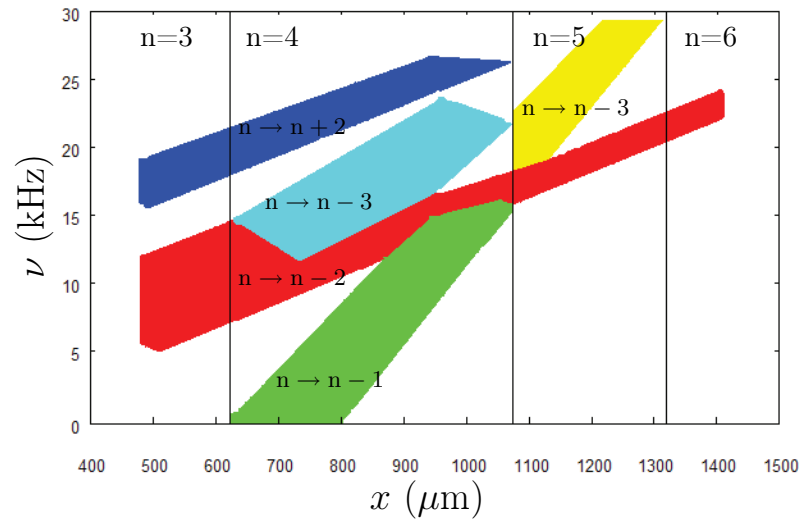


FIGURE 4.4 – *Prévisions des zones affectées par les différentes transitions dans la densité de présence transmise. La dispersion de vitesse initiale est large et permet l'occupation des bandes 3,4,5 et 6.*

situé à $500 \mu\text{m}$ du puits initial ($x = 0$). Le paquet se propage pendant 78 ms, il est ensuite imagé *in situ* par une imagerie par absorption. La figure (4.3)(a) représente la densité atomique après le temps de propagation en fonction de la fréquence de modulation. Chaque ligne est obtenue en moyennant huit images intégrées le long de la direction transverse. La figure (4.3)(b) est le résultat de ma simulation numérique dont la dispersion de vitesse et la vitesse initiales ont les mêmes valeurs que celles mesurées expérimentalement. Les interactions inter-atomiques sont négligeables. L'accord entre simulations et expériences est bon, à part pour les zones très proches des lignes de déplétion dans la partie transmise ($x > 500 \mu\text{m}$). A l'exception des zones très proches des zones de déplétion, à chaque position x dans la partie transmise, est associée une classe de vitesse incidente v bien définie $x \simeq vt_{\text{prop}} + K$, où K est une constante [39]. Cette correspondance traduit le développement de la corrélation position-vitesse au cours de la propagation. La ligne de

déplétion verticale pour $x \simeq 800 \mu\text{m}$, qui ne dépend pas de la fréquence de modulation, correspond à la réflexion de Bragg sur le réseau statique. Les autres zones de déplétion et leur possible partie complémentaire sont liées à la modulation du réseau.

Pour identifier chaque zone de déplétion dans la partie transmise, la figure (4.4) représente les zones dans la densité atomique transmise affectées par les différentes transitions inter-bandes, en fonction de la fréquence. L'axe des ordonnées, est donné en fonction de la position, cependant à chaque position finale est associée une vitesse et une énergie initiales. La dispersion de vitesse et donc d'énergie initiale du paquet d'onde permet le peuplement des bandes de 3 à 6. Pour chaque énergie initiale, nous calculons les différents écarts énergétiques entre les différentes bandes. L'enveloppe gaussienne du réseau est responsable de l'élargissement des bandes à une énergie donnée. Les zones colorées indiquent que pour cette position finale (liée à une vitesse incidente) il existe une position, sur le réseau, telle que la condition de résonance de la transition indiquée est vérifiée. Ce diagramme nous permet d'identifier les différentes transitions inter-bandes qui affectent la partie transmise. Les trois zones, numérotées sur la figure (4.3)(b), correspondent aux trois scénarios que nous avons identifié précédemment (4.1.1). La partie 1 correspond à une transition de la bande 4 vers la bande 3, la vitesse de groupe change de signe, les classes de vitesse concernées sont réfléchies. La partie réfléchie est visible. La zone de déplétion 2 est résonnante avec une transition entre 4 et 2. La bande 2 est piégée, par conséquent une partie du paquet sur la bande 2 rebondi sur le bord du réseau et change de sens de vitesse de groupe. La modulation ($\nu = 10 \text{ kHz}$) permet au paquet de repasser sur la bande 4. La partie avec une vitesse négative est réfléchi et forme la partie complémentaire du trou. La partie avec une vitesse positive est transmise avec un certain retard, du fait que la vitesse de groupe est plus faible sur la bande 2. Ceci qui explique le pic de densité à gauche de la zone de déplétion. La figure (4.5) représente les projections sur les pseudo-états de Bloch, voir formule (3.12). La dispersion de vitesse du paquet utilisée dans les simulations (0.2 mm.s^{-1}) permet d'isoler uniquement le paquet réfléchi. A l'entrée du réseau ($\theta_1 = -1.2$), le paquet se projette sur la bande 4 avec une vitesse de groupe positive. En $\theta_1 = -0.8$, l'écart énergétique entre la bande 4 et 2 est *localement* résonnant avec la fréquence de modulation, la transition inter bande s'effectue à cet endroit en conservant la pseudo-impulsion, et par conséquent le sens de la vitesse de groupe. Le paquet est piégé sur la bande 2_p , inverse le sens de sa vitesse ($\theta_1 = -0.3$) et se projette sur 2_n . En repassant en $\theta_1 = -0.8$, la condition de résonance est à nouveau vérifiée, le paquet effectue une transition vers la bande 4_n , sa vitesse de groupe est négative donc il peut sortir du réseau. A la différence des scénarios de déplétion 1 et 2, on ne distingue pas de partie réfléchi complémentaire pour la ligne 3. Les atomes ont réalisé une transition de la bande 4 vers la bande 6, la vitesse de groupe est de même signe, mais plus élevée, autrement dit le paquet est accéléré. Les pics de densité à droite de la zone de déplétion et l'absence de partie réfléchi ne font que confirmer le scénario. Ces travaux ont été repris en utilisant une méthode semi-classique pour suivre les trajectoires, ils seront exposés sous cette forme dans la thèse de Pierrick Cheiney et l'article de notre groupe [39].

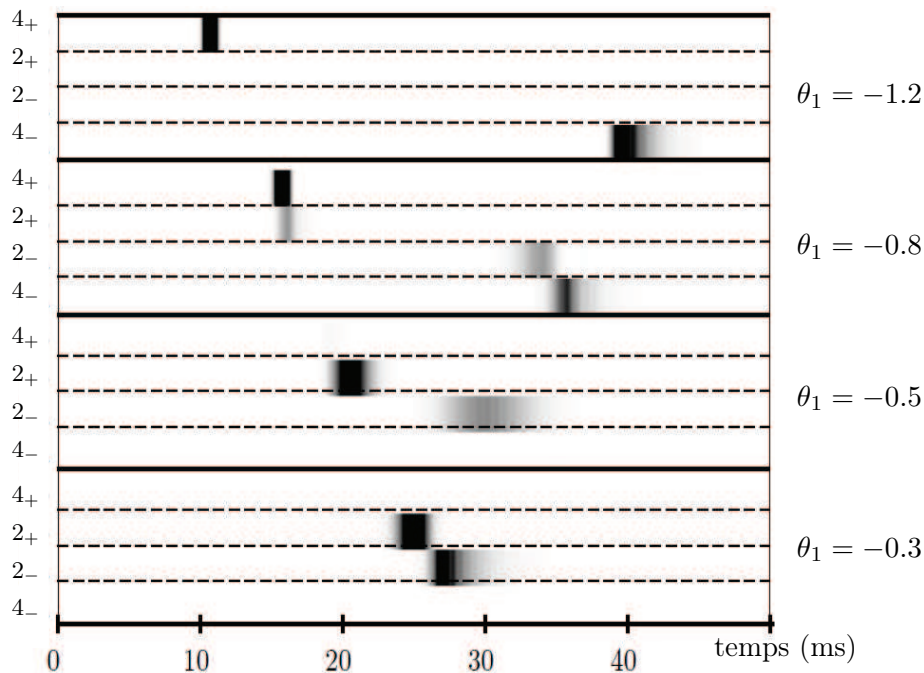


FIGURE 4.5 – *Projection sur les pseudo-états de Bloch des composantes de vitesse effectuant une transition de la bande 4 vers 2.*

Double fréquence

Dans ce paragraphe, nous démontrons que notre système peut être utilisé comme un filtre de vitesse en combinant deux fréquences. Nous proposons ici un exemple en tirant parti de la ligne de déplétion majoritaire, voir figure (4.3) qui correspond à une transition de la bande n vers la bande $n - 2$. Dans notre optique de sélectionner une classe de vitesse de la fonction d'onde, nous modulons le réseau avec deux fréquences différentes. Ce qui a pour effet de créer deux bandes de réjection dans la densité transmise. Le potentiel s'écrit :

$$-2qE_R [1 + \sin(2kx)] (1 - A \cos(2\pi\nu t) - A \cos(2\pi\nu_2 t)) f(x). \quad (4.2)$$

De manière rigoureuse, la dynamique détaillée de la fonction d'onde soumise à un réseau modulé avec deux fréquences ne peut se déduire de la dynamique à une seule fréquence. Cependant, l'image simple selon laquelle les zones de déplétion sont creusées, de manière presque indépendantes, dans la distribution de vitesse avec deux fréquences est très robuste, voir figure (4.6). La fine tranche atomique, entre les deux zones de réjection, forme les atomes filtrés. La vitesse moyenne de ce paquet est contrôlée par $d(\nu_1 + \nu_2)/2$, tandis que sa largeur est ajustable au moyen de la différence de fréquence $|\nu_2 - \nu_1|$. Les fréquences choisies sont $\nu_1 = 16$ kHz et de 16 à 20 kHz pour ν_2 (expérience) et de 12 à 26 kHz pour la simulation. Entre les deux lignes de réjection, la fine tranche atomique de dispersion de vitesse de $450 \mu\text{m/s}$ contient environ 1000 atomes.

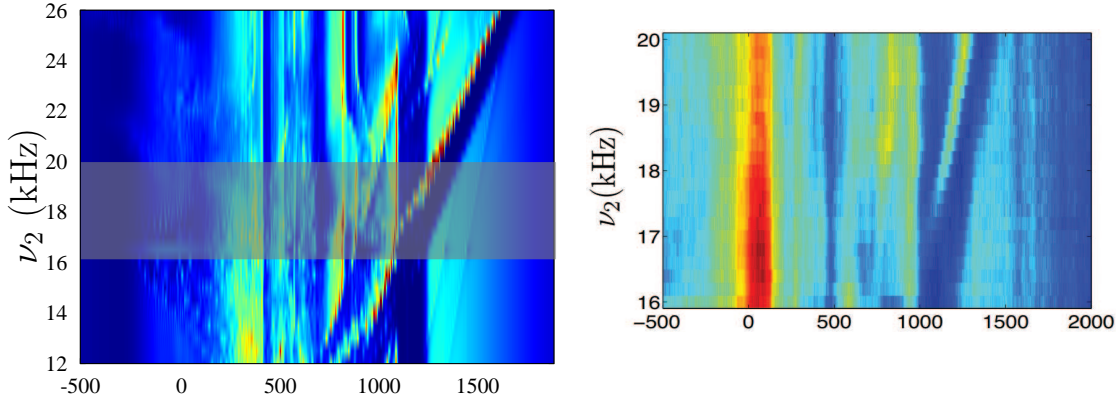


FIGURE 4.6 – Densité atomique en fonction de la fréquence de modulation ν_2 . La fréquence de modulation ν_1 est fixée à 16 kHz. Paquets d'onde et réseau (hormis la deuxième fréquence) sont identiques aux paramètres (4.1.2). Entre les deux zones de réjection, un fin paquet atomique est transmis. (a) Simulations numériques. (b) Résultats expérimentaux correspondant à la partie grisée sur le graphe des simulations. La simulation reproduit bien le graphe expérimental.

4.1.3 De l'équivalence du réseau modulé à un réseau mobile

Le potentiel du réseau modulé en intensité (4.1) peut s'écrire :

$$V(x, t) = -2qE_R \left[1 - A \cos(2\pi\nu t) + \sin(2kx) - \frac{A_+}{2} \sin(2kx + 2\pi\nu t) - \frac{A_-}{2} \sin(2kx - 2\pi\nu t) \right] \Theta(x, \tilde{n}), \quad (4.3)$$

où l'on fait apparaître deux réseaux contra-propageant que nous avons distingué par A_+ et A_- . $\Theta(x, \tilde{n})$ est la fonction enveloppe carrée, \tilde{n} le nombre de périodes. Nous testons, sur un exemple, la nécessité de ces deux termes dans réflexion sur un réseau modulé. En effet, nous pouvons *a priori* faire l'hypothèse que la réflexion sur le réseau modulé est produite par un seul des deux réseaux mobiles. Nous entendons par là, que la réflexion est seulement dans le référentiel du réseau mobile concerné une réflexion de Bragg "statique".

Pour tester cette hypothèse, nous considérons une réflexion créée par la modulation et nous regardons si elle existe en éteignant A_+ ou A_- . Le résultat est représenté sur la figure (4.7), où est tracée la réflexion du paquet d'onde en fonction de la vitesse incidente du paquet d'onde v_0 . Le réseau est de profondeur assez faible $q = 0.75$, ce qui nous permet d'être dans le régime de diffusion de Bragg. Le réseau compte 80 pas de taille $d = 0.65 \mu\text{m}$. L'amplitude de modulation est $A = 30\%$, la fréquence de $2\pi \times 10$ kHz. Nous utilisons délibérément un paquet d'onde de dispersion de vitesse relativement faible devant les largeurs des résonances en vitesse. Cela permet d'étudier la diffusion d'une classe de vitesse unique. En noir, le coefficient de réflexion pour le réseau modulé, en rouge et vert lorsque A_- et A_+ sont respectivement éteintes. Les deux réseaux contra-propageant sont nécessaires pour créer la réflexion sur un réseau modulé. Un argument supplémentaire en défaveur d'une interprétation en terme d'une réflexion de Bragg sur un référentiel en mouvement, est que

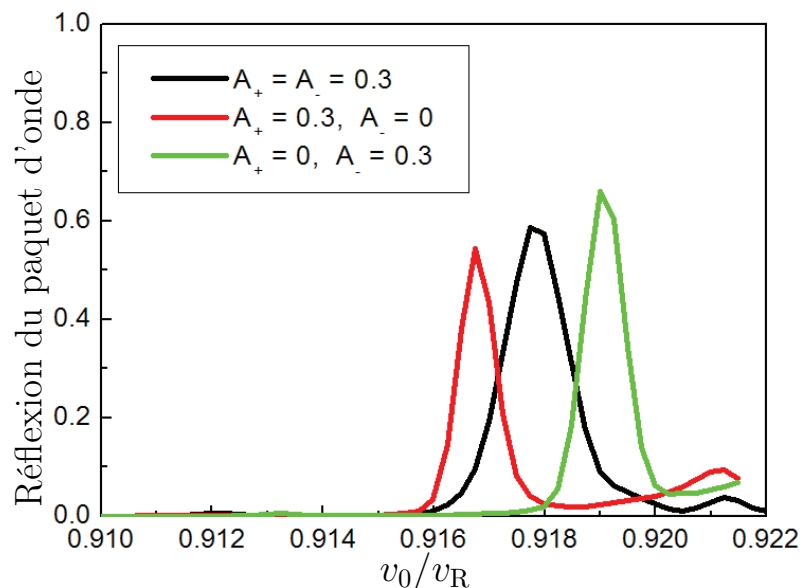


FIGURE 4.7 – *Test de l'équivalence entre un réseau d'amplitude modulée et un réseau mobile.* La profondeur du réseau est $q = 0.75$. Le paquet d'onde a une vitesse moyenne de v_0 et une dispersion de vitesse de $\Delta v = 0.2 \text{ mm.s}^{-1}$. La fréquence de modulation ν est de 10 kHz .

la partie de la fonction d'onde réfléchi est, dans cet exemple, spéculaire. En imaginant une réflexion de Bragg dans le référentiel du réseau mobile, la fonction aurait été accélérée ou ralentie de la vitesse du réseau dans le référentiel du laboratoire. Les pics de réflexion ne concernent pas les mêmes classes de vitesse, selon le sens de déplacement des motifs. Ce résultat démontre *a priori* la possibilité de réaliser une diode pour une onde de matière en mouvement. Pour autant ce résultat est très préliminaire, il reste à comprendre plus précisément l'écart en vitesse des classes réfléchies et à interpréter dans un cadre plus général ce comportement diodique [40].

Markus Oberthaler et ses collaborateurs [41] ont réalisé une expérience de modulation dans une géométrie différente pour laquelle le jet incident aborde le réseau avec un angle. Ils ont observé des collisions "inélastiques" des atomes sur le réseau modulé correspondant à l'absorption ou à l'émission de photons d'énergie $\hbar\omega$, où ω est la fréquence de modulation. Ces effets peuvent être interprétés comme une diffusion sur un réseau mobile. Notre géométrie de part sa symétrie inhibe de tels processus.

4.2 Réseau attractif dont le motif se déplace à vitesse constante

Il s'agit d'une étude très préliminaire en vue d'une mise en oeuvre expérimentale éventuelle. Dans ce cadre, nous considérons uniquement le cas d'enveloppe gaussienne du réseau. Par ailleurs, nous distinguerons les deux sens de déplacement du motif par rapport à l'onde incidente.

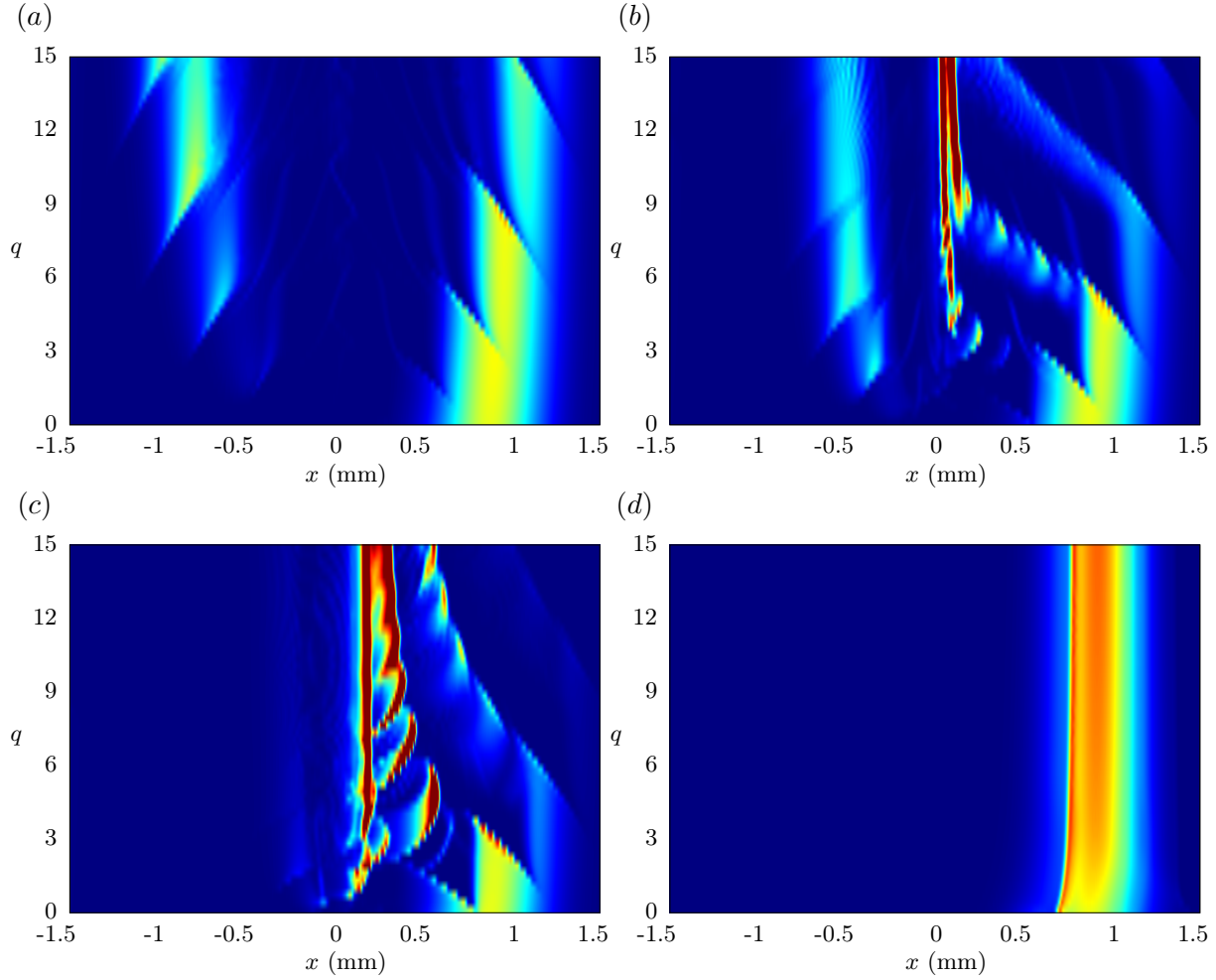


FIGURE 4.8 – *Densité atomique après interaction avec un réseau se déplaçant à vitesse constante dans le même sens que le paquet incident, en fonction de la profondeur. (a) $\bar{v} = 0 \text{ mm.s}^{-1}$, (b) $\bar{v} = 2 \text{ mm.s}^{-1}$, (c) $\bar{v} = 4 \text{ mm.s}^{-1}$, (d) $\bar{v} = 13 \text{ mm.s}^{-1}$.*

4.2.1 Potentiel réseau

Lorsque les deux faisceaux laser, voir figure (3.1), qui créent le potentiel sont décalés en fréquence de $\delta\nu$, le potentiel est alors celui d'un réseau qui se déplace à vitesse constante dans le référentiel du laboratoire :

$$V(x, t) = -2qE_R [1 + \sin(2k(x - \bar{v}t))] \exp(-2x^2/w^2), \quad (4.4)$$

où $\bar{v} = \delta\nu / d$. Selon le signe de $\delta\nu$, le réseau se déplace de manière contra-propageante ou pas par rapport au sens du paquet atomique. Avec les ordres de grandeur typiques de notre dispositif expérimental, $\bar{v} = 0.65 \text{ mm.s}^{-1}$ pour $\delta\nu = 1 \text{ kHz}$, la vitesse du paquet atomique incident est de l'ordre de $v_R = 7 \text{ mm.s}^{-1}$.

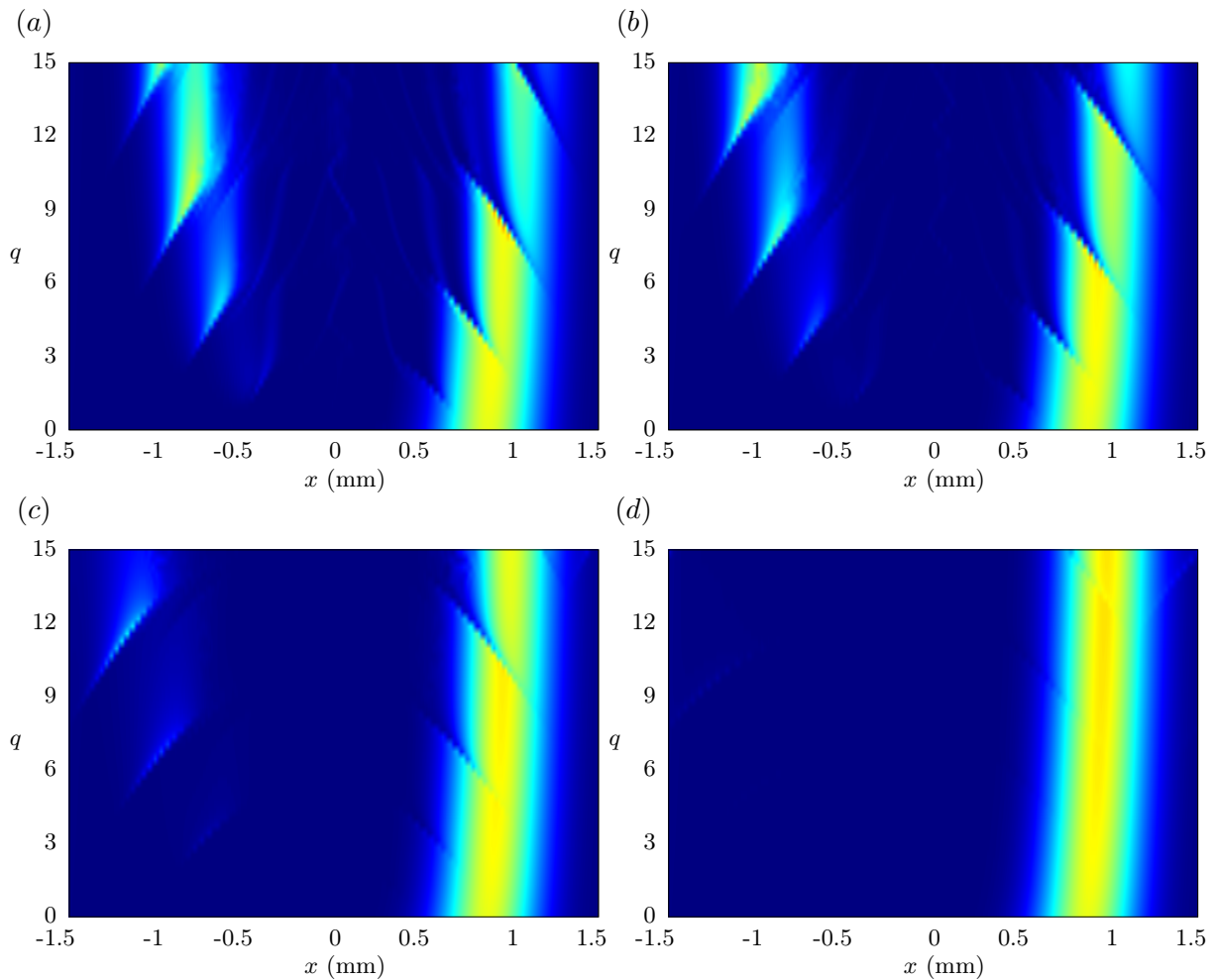


FIGURE 4.9 – *Densité atomique après interaction avec un réseau se déplaçant à vitesse constante dans le sens opposé du paquet incident, en fonction de la profondeur. (a) $\bar{v} = 0 \text{ mm.s}^{-1}$, (b) $\bar{v} = -2 \text{ mm.s}^{-1}$, (c) $\bar{v} = -4 \text{ mm.s}^{-1}$, (d) $\bar{v} = -13 \text{ mm.s}^{-1}$.*

4.2.2 Analyse en fonction de la profondeur

Dans ce paragraphe, nous présentons des résultats de prospective en vue d'une expérience pour laquelle la diffusion s'opère sur un réseau dont le motif est animé d'une vitesse constante. Nous regardons comment les graphes représentant la densité de présence en fonction de la position sont modifiés lorsque le réseau se déplace. Hormis le déplacement du réseau à la vitesse \bar{v} , l'expérience simulée numériquement, est exactement identique au résultat principal du chapitre sur les réseaux statiques (3.5.2). Le paquet d'onde atomique, de dispersion de vitesse $\Delta v = 1.7 \text{ mm.s}^{-1}$ et de vitesse moyenne $v_0 = 11.2 \text{ mm/s}$, est placé à $350 \text{ } \mu\text{m}$ du centre du réseau. Le temps de propagation est de 100 ms. Les figures (4.8) et (4.9) représentent, pour différentes vitesses de déplacement du réseau respectivement positives et négatives, la densité de présence après interaction avec le réseau en fonction de la profondeur du réseau q . Le réseau est en $x = 0$. Lorsque le réseau se déplace à des

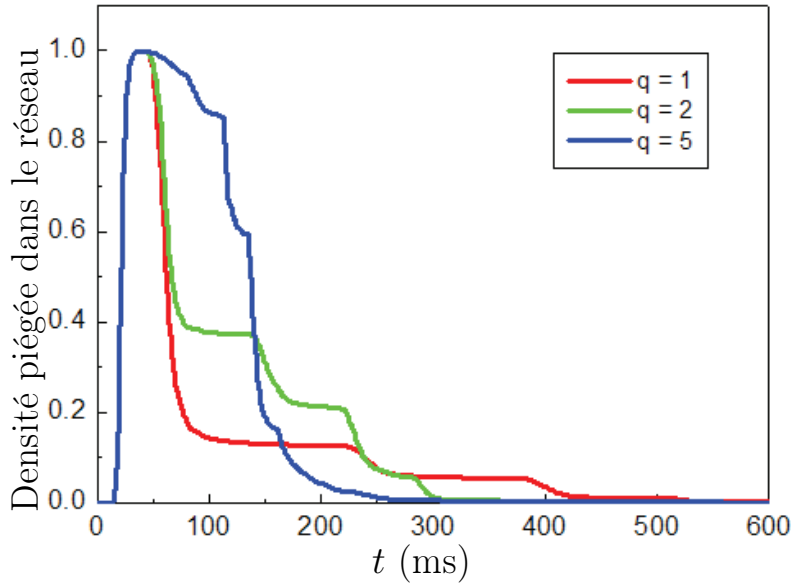


FIGURE 4.10 – *Densité atomique piégée dans le réseau au cours du temps pour différentes profondeurs du réseau de la figure (4.8,c) où $\bar{v} = 4 \text{ mm.s}^{-1}$. La densité piégée à $t = 100 \text{ ms}$, sort progressivement au cours du temps.*

vitesses relativement importantes (ici environ deux fois la vitesse caractéristique associée au réseau v_R , soit $\bar{v} = \pm 13 \text{ mm.s}^{-1}$) les atomes ne ressentent plus le potentiel sinusoïdale, mais seulement le potentiel moyen de l'enveloppe gaussienne, ils sont alors transmis. Pour les vitesses $\bar{v} = 2$ et 4 mm.s^{-1} , après le temps de propagation choisi (100 ms), une partie de la densité atomique est transitoirement piégée dans le réseau. La densité atomique sort par petits paquets pour des temps de propagation plus longs. Pour différentes profondeurs, nous avons représenté la densité atomique en fonction du temps, voir figure (4.10). La compréhension de ce phénomène sera faite au cours de la thèse de François Damon.

4.3 Effet cavité

Dans cette partie, nous présentons deux idées pour piéger des paquets atomique sur un réseau d'enveloppe gaussienne.

4.3.1 Passage sur bande piégée par modulation

La modulation permet au paquet d'onde de passer sur une bande piégée. Dans ce paragraphe, nous testons à l'aide d'un exemple numérique la possibilité d'arrêter la modulation lorsque le paquet est piégé ; c'est-à-dire que nous interrompons la modulation lorsque le paquet est piégé dans le scénario (ii) du paragraphe (4.1.1). Le paquet a une dispersion de vitesse de 4 mm.s^{-1} et une vitesse initiale de 10 mm.s^{-1} . Le réseau est attractif de profondeur $q = 13$, de pas $d = 0.65 \mu\text{m}$ et de waist $40 \mu\text{m}$. La fréquence de modulation est de 10 kHz et l'amplitude est de 30% . La figure (4.11) représente la densité de présence

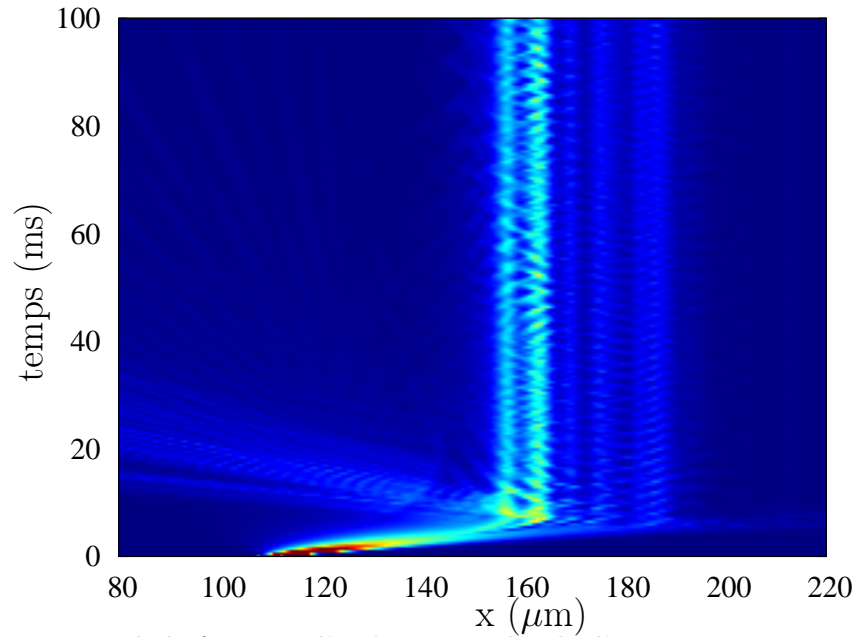


FIGURE 4.11 – Piégeage de la fonction d’onde sur une bande d’énergie négative. La transition inter-bande est réalisée au moyen de la modulation d’intensité du réseau. La fréquence de modulation est accordée sur l’écart énergétique entre les bandes.

au cours du temps. La modulation est coupée après un temps de 7 ms. Sur cet exemple environ 40 % de la densité atomique est piégée sur une bande d’énergie négative. Cette méthode permet *a priori* de piéger des atomes issus de paquets d’atomes en mouvement.

4.3.2 Piégeage sur le réseau par réflexion de Bragg - effet d’enveloppe

Dans ce paragraphe, nous présentons succinctement une idée de G. Birkel et ses collaborateurs [42] pour piéger un paquet d’onde sur des bandes d’énergie positive. Le réseau est allumé au niveau du paquet d’onde en mouvement (il n’y a aucune modulation de l’amplitude). Le processus est adiabatique si le temps de montée du réseau t_m , vérifie la condition :

$$\frac{d\omega}{dt} \ll \omega^2, \quad (4.5)$$

où ω est la pulsation harmonique des puits sinusoïdaux du réseau. La figure (4.12) présente un exemple de piégeage sur une bande d’énergie positive. Le paquet a une dispersion de vitesse de 0.2 mm.s^{-1} , une vitesse initiale de 13 mm.s^{-1} . Le réseau est attractif de profondeur $q = 7$, de pas $d = 0.65 \text{ μm}$, de waist 140 μm . Le réseau est allumé lorsque le paquet est au centre du réseau. Nous avons représenté la dynamique de la densité de présence en fonction du temps (a) et (b), ainsi que les projections sur les pseudo-états de Bloch au centre du réseau ($\theta_1 = 0$) en fonction du temps (d) et (e). Les conventions couleurs sont données sur le diagramme de bande (c). Pour $t_m = 50 \text{ μs}$ le processus est adiabatique et le paquet d’onde est piégé sur la bande 4. Le paquet reste à énergie constante en variant la pseudo-impulsion lorsqu’il parcourt l’enveloppe gaussienne. Le gap entre les bandes 4 et 3 fait miroir de Bragg pour le paquet d’onde qui passe de 4_- à 4_+ et réciproquement. Le paquet d’onde est piégé entre deux miroirs de Bragg. Pour $t_m = 0 \text{ μs}$, le processus n’est

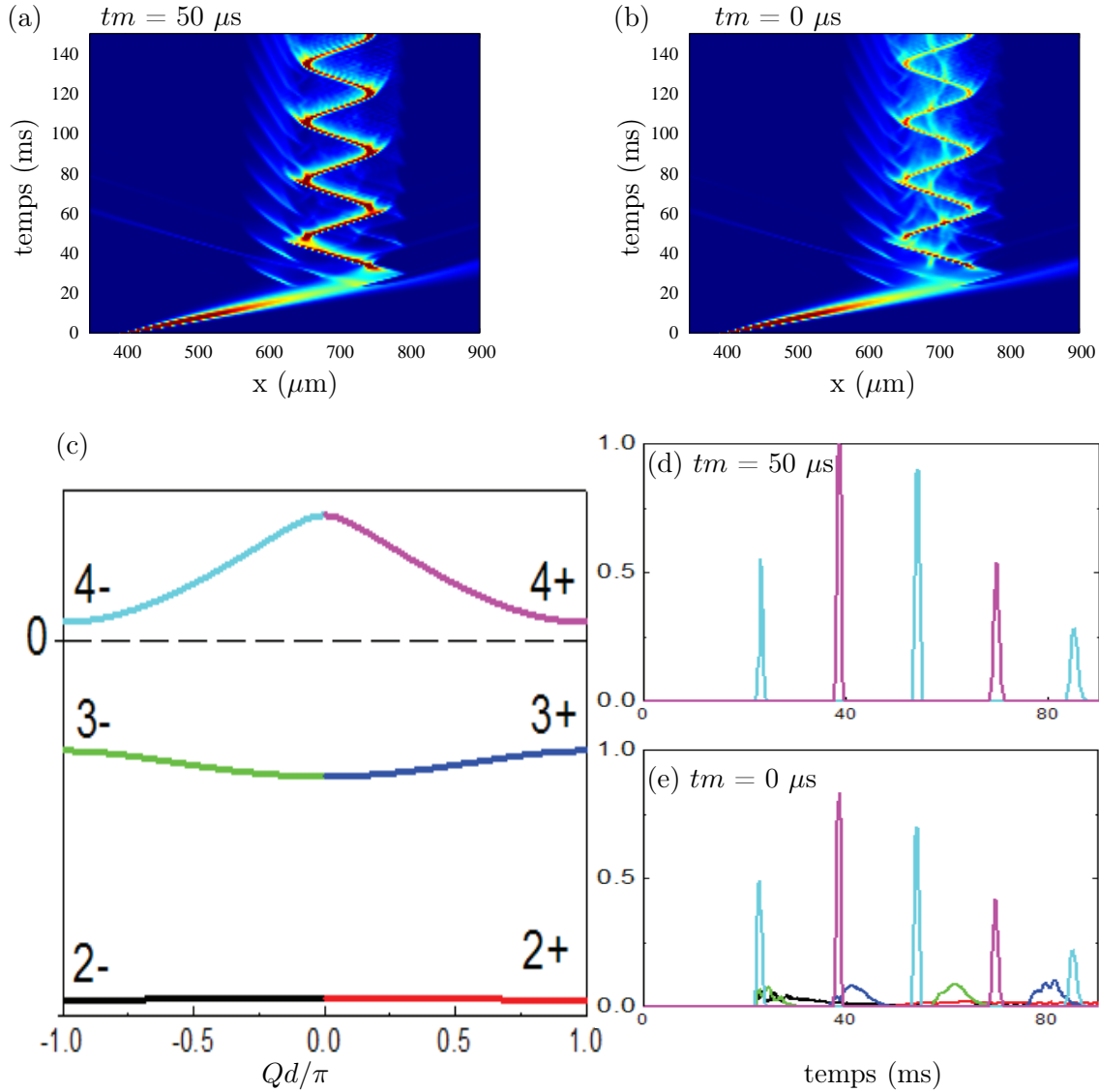


FIGURE 4.12 – Piégeage de la fonction d’onde sur une bande d’énergie positive par réflexion de Bragg. (a) et (b) Dynamique de la densité de présence. (c) Convention de couleurs des différentes bandes. (d) et (e) Projections de la fonction d’onde sur les pseudo-états de Bloch. lorsque le processus d’allumage du réseau est adiabatique, seule la bande 4 est peuplée. La signature d’un processus non adiabatique est visible sur la dynamique, le paquet d’onde se scinde en plusieurs composantes de vitesses différentes.

pas adiabatique, le paquet d’onde se projette sur plusieurs bandes comme nous le voyons sur la figure (e). Le caractère non adiabatique est visible sur la dynamique, en effet les différentes bandes ont différentes vitesses de groupe et les réflexions de Bragg ont lieu à des endroits différents. Les rapports de stage de master 2 de François Damon et Gabriel Condon présentent une expérience de piégeage ainsi qu’une analyse plus avancée de ces effets de cavité.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons amorcé l'étude des réseaux dépendant du temps. Nous avons montré la possibilité d'interpréter les résultats de réflexion du paquet atomique au moyen de la structure de bande d'un réseau optique et en particulier des résonances interbandes. La partie modulation d'intensité a fait l'objet d'une publication [39]. Nous avons montré la possibilité d'utiliser la dépendance temporelle des réseaux pour contrôler la réflexion, filtrer en vitesse ou piéger le paquet atomique incident. La possibilité de rediriger une onde selon la modulation, que nous avons présenté, rappelle la théorie des transistors quantiques modulés [43, 44].

Cette même partie fait l'objet d'un chapitre de la thèse de P. Cheiney, où il expose les subtilités expérimentales et propose une analyse de type Floquet-Bloch.

Chapitre 5

Réflexion de Bragg en présence d'un confinement transverse fort

5.1 Problématique

5.1.1 Introduction

L'idée physique derrière l'étude très préliminaire que nous proposons dans ce chapitre est très simple. En présence d'un confinement fort, un couplage entre les degrés de liberté permet de déposer une fraction importante de l'énergie cinétique incidente dans les degrés de liberté transverses. Un tel processus abaisse l'énergie longitudinale drastiquement. Si cette énergie ainsi réduite correspond à un domaine de réflexion, l'onde est alors réfléchie. La distribution des énergies incidentes réfléchies est augmentée par ce processus. Une première proposition de notre groupe basée sur notre publication 2010 dans *New J. Phys.* abordait le cas d'école d'une boîte carrée de potentiel superposée à un guide harmonique à une dimension transverse [20]. Il a permis d'identifier ce type de processus dont il existe un pendant dans la physique des collisions atome-atome ayant lieu dans un guide ultra confinant [45, 46], soit à 1d. Ce phénomène porte l'acronyme de CIR pour *Confinement-Induced Resonances* [47]. Un phénomène de même nature à 2d a été prédit par Petrov et al [48]. Initialement la motivation dans le domaine de la physique des collisions provenait de la possibilité de réaliser un gaz de Tonks-Girardeau, exemple emblématique de problème à N corps fortement corrélé. Un gaz de bosons dans ce régime présente une correspondance avec un gaz de fermions libres, et réalise un liquide de Luttinger. Le paramètre sans dimension qui intervient est $\gamma = mg_1/\hbar^2 n_{1d}$, où n_{1d} est la densité à une particule et g_1 la constante de couplage des forces d'interactions, (voir formule (1.20), chapitre 1)¹. Pour rentrer dans le régime de Tonks Girardeau, il faut $\gamma \gg 1$. Il y a donc plusieurs méthodes pour entrer dans ce régime :

- (i) diminuer la densité,
- (ii) augmenter la force des interactions ou/et,

1. On parle de gaz de Tonks Girardeau pour $g_1 \rightarrow \infty$ et de super Tonks gaz pour $g_1 \rightarrow -\infty$, G. E. Astrakharchik et al. [49] à 1d

- (iii) augmenter la masse (via un réseau optique, on augmente la masse effective).

Ces trois voies possibles ont été démontrées expérimentalement respectivement [50, 51, 52]. La découverte d'une résonance de la section efficace en dimension réduite a constitué une surprise. Elle a été exploitée par E. Haller et al. pour rentrer dans le régime de Tonks Girardeau. En définitive, les propriétés d'un système à N corps sont utilisées pour détecter et étudier les résonances induites par confinement [53]. En physique collisionnelle, une seule expérience de diffusion à proprement parlé a été faite [54] dans un contexte à deux espèces où l'une est confinée à 2d et pas l'autre. Les collisions modifiées par leur environnement ont également fait l'objet de recherche pour le cas de fermions dans un réseau optique 3d [55], l'observation du déplacement d'une résonance de Feshbach dans M. Köhl est attribuée à une résonance induite par confinement dans ce contexte [56]. L'article de revue de Maxim Olshanii [47] paru en 2011 donne un bilan complet de ce sujet. Dans ce chapitre nous présenterons le cas qui nous intéresse où l'interaction est faite non pas avec un potentiel atomique mais un potentiel lumineux extérieur qui permet a priori plus de flexibilité. Nous présenterons une proposition de mise en place expérimentale du réseau de confinement avec un laser Verdi disponible dans le laboratoire. Sur la base d'exemples de dynamique de la fonction d'onde, nous nous appliquons à répertorier les différents phénomènes nouveaux, dû à la présence du confinement et proposer des observables pour les quantifier en fonction de la force du confinement. Enfin, nous proposons une approche succincte des résultats de physique classique pour ce système afin de mieux interpréter la dynamique purement quantique.

5.1.2 Potentiel modèle

Nous proposons donc une géométrie dans laquelle un réseau croise le guide. Le réseau sera incliné à 45 degrés, voir schéma (5.1), c'est à la fois l'angle optimal pour le couplage entre les degrés de liberté longitudinaux et transverses du guide, et c'est, de plus, l'angle le plus simple à réaliser expérimentalement du fait des contraintes imposées par notre chambre à vide. Pour le réseau, nous proposons de faire un réseau avec la lumière à 852 nm que nous avons utilisée dans l'expérience du chapitre (3) dans le cadre des réseaux à une dimension. Le réseau optique créé par deux faisceaux contra propageant, formant un angle de 45 degrés par rapport à l'axe du guide x , s'écrit :

$$V(x, y) = -2qE_R[1 + \sin(2k(x - y))]f(x, y) + \frac{m\omega_y^2}{2}y^2, \quad (5.1)$$

où f est la fonction enveloppe. La table (5.1) récapitule les différents paramètres.

5.2 Mise en place expérimentale

La réalisation expérimentale d'une boîte de dimension submicronique par une méthode optique est naturellement hors de portée (résolution optique limitée). En revanche, il est possible de réaliser grâce à un réseau optique une multitude de pièges submicroniques.

Paramètres	Expressions	valeurs typiques
Longueur d'onde du laser potentiel	λ_l	852 nm
Demi-angle entre les deux faisceaux	θ	90°
Pas du réseau	$d = \lambda_l / [2 \sin(\theta)]$	$\frac{\lambda_l}{2} = 426$ nm
Vecteur d'onde du réseau	$k = \pi/d$	
Énergie de recul	$E_R = \hbar^2 k^2 / 2m$	
Vitesse de recul	$v_R = 2\hbar k / m$	$\simeq 10.7$ mm.s ⁻¹
Profondeur normalisée q		
Pulsation du confinement transverse	ω_y	

TABLE 5.1 – Paramètres de la modélisation et les valeurs utilisées dans ce chapitre pour le réseau incliné, sauf mention contraire.

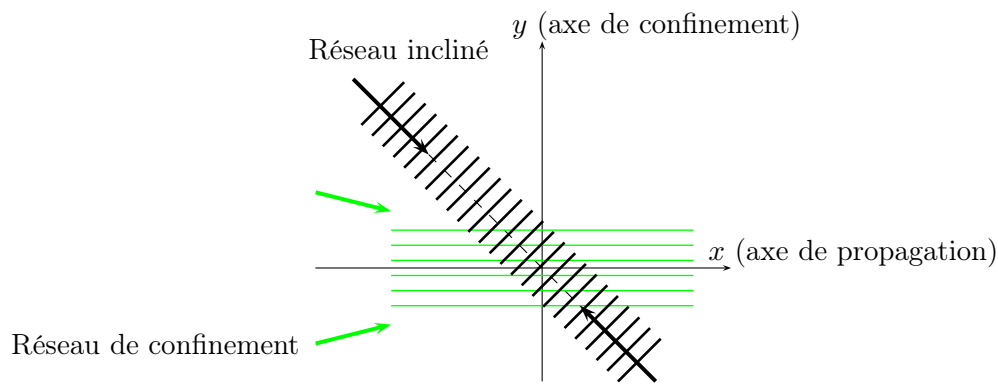


FIGURE 5.1 – Schéma de la géométrie des faisceaux lasers créant le réseau incliné et le réseau de confinement transverse (vert).

5.2.1 Proposition de confinement par un réseau optique

L'effet que nous souhaitons observer implique de facto qu'un quantum d'énergie transverse corresponde à une énergie non négligeable en regard de l'énergie cinétique incidente typique. Pour une vitesse de $\bar{v} = 1$ cm/s, l'énergie cinétique $E_c = m\bar{v}^2/2$, soit $E_c/\hbar \simeq 2\pi \times 11$ kHz. Pour voir un effet il est donc nécessaire de confiner transversalement les atomes au moins dans une direction avec une fréquence angulaire supérieure à quelques kilohertz. Nous montrerons par des simulations que cette gamme de fréquence est clairement nécessaire pour observer l'effet attendu. Le guide pourrait a priori être recomprimé, mais en pratique cela conduirait à des valeurs d'intensité trop élevées et il y aurait trop de pertes induites par le laser ; en effet le guide est réalisé grâce à un laser désaccordé sur le rouge de la transition. Cette solution n'est par suite pas réaliste. Nous proposons d'ajouter un réseau sur le bleu de la transition atomique dans une direction pour guider fortement les atomes dans une direction transverse à l'instar de ce qui a été fait dans un autre contexte dans la publication [57]. Par la suite, nous distinguerons le réseau incliné et le réseau de confinement.

5.2.2 Les ordres de grandeur avec le laser verdi

Nous rappelons ici les ordres de grandeurs du laser verdi de longueur d'onde (532 nm) pour réaliser le réseau de confinement. L'angle que nous proposons d'utiliser est dicté par la dimension de la chambre. Si nous rentrons par la fenêtre de sortie du faisceau dipolaire horizontal (axe x), le demi-angle maximum est de l'ordre de 1 cm / 28 cm, soit un angle entre les deux faisceaux $\theta_V = 0,07143$ radians. Le réseau qui en résulte a un pas $d_V = \lambda_V / 2 \sin(\theta_V/2) \simeq 7,45 \mu\text{m}$. Le potentiel transverse vu par les atomes est :

$$V(y) = \frac{V_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi y}{d_V} \right) \right], \quad (5.2)$$

où pour deux faisceaux Verdi de 2 W chacun avec un waist de 300 μm (longueur de Rayleigh 53 cm) $V_0/k_B \simeq 4,8 \mu\text{K}$. La fréquence angulaire de confinement vaut

$$\omega_y = \frac{2\pi}{d_V} \sqrt{\frac{V_0}{m}}, \quad (5.3)$$

soit avec les mêmes valeurs numériques que précédemment $\omega_y = 2\pi \times 2860$ Hz.

5.3 Signature Expérimentale

5.3.1 Absorption de quanta

La signature expérimentale de l'absorption de quanta transverses est ici extrêmement simple. Il s'agit de regarder les paquets réfléchis. En effet, on s'attend à ce que le paquet incident donne lieu asymptotiquement à plusieurs paquets réfléchis se propageant à des vitesses différentes et de taille transverse augmentée. Chaque paquet réfléchi correspond au transfert de zéro, un ou plusieurs quanta d'énergie dans le degré de liberté transverse. Pour déterminer la vitesse des paquets, nous écrivons la conservation de l'énergie pour un atome :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{\hbar\omega_y}{2} = \frac{1}{2}mv_n^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y, \quad (5.4)$$

où v_0 est la vitesse initiale, n le nombre de quanta absorbés et v_n la vitesse après interaction avec le réseau. Nous représentons un exemple sur la figure (5.2). La figure (a) représente la dynamique intégrée le long de l'axe de confinement, nous distinguons trois paquets réfléchis à différents instants avec des vitesses différentes. La figure (b) représente la transformée de Fourier le long de l'axe x , nous y retrouvons v_0 , v_2 et v_4 . Le paquet réfléchi ayant absorbé 4 quanta est piégé un certain temps (≈ 15 ms) dans le réseau avant d'être réfléchi.

Une autre signature, qui confirme l'absorption de quanta, est la corrélation entre la taille transverse des paquets et leur vitesse. La figure (5.3) (a) représente la densité de probabilité de la fonction d'onde à $t = 22$ ms. De gauche à droite, on retrouve les paquets ayant absorbé respectivement 2, 4 et 0 quanta. Plus le paquet a absorbé de quanta, plus la taille transverse des paquets est importante. La figure (b) représente la densité de probabilité de présence

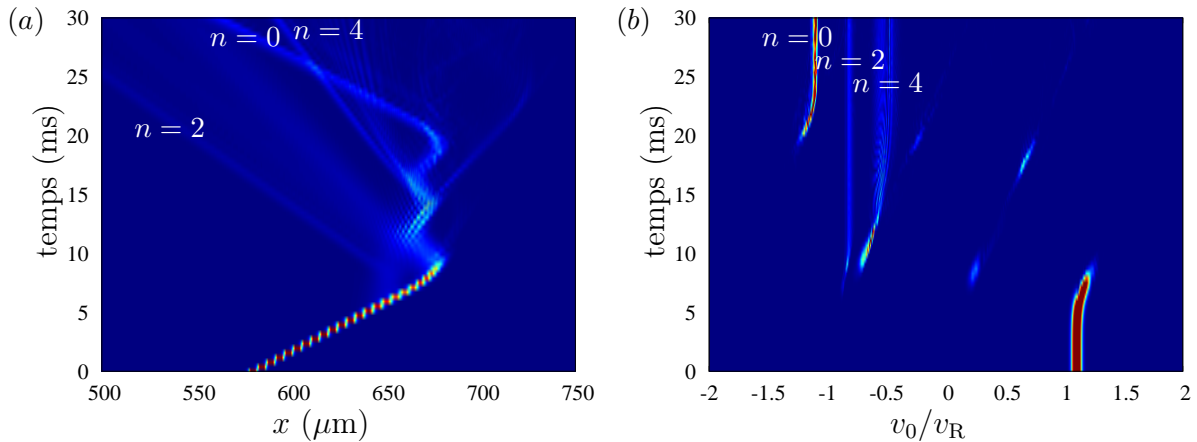


FIGURE 5.2 – *Dynamique d'un paquet d'onde atomique en fonction du temps. (a) Densité de présence selon l'axe de propagation x . Pour chaque abscisse, la fonction d'onde est intégrée le long de l'axe y . Cette représentation permet de distinguer les différents paquets réfléchis à différents instants. (b) Transformée de Fourier de la fonction d'onde au centre du guide, les paquets réfléchis ont différentes vitesses selon le nombre de quanta absorbés. Le réseau est attractif de profondeur $q = 0.75$, d'enveloppe gaussienne de waist $50 \mu\text{m}$. Le centre du réseau est en $x = 700 \mu\text{m}$. Le confinement transverse est $2\pi \times 3000 \text{Hz}$. Le paquet atomique incident est un paquet gaussien limité de vitesse $v_0 = 1.1 v_R$ et de dispersion de vitesse longitudinale $\delta v_x = 0.35 \text{mm.s}^{-1}$. Il est initialement dans le niveau fondamental du confinement transverse.*

intégrée sur le temps pour un confinement transverse est $2\pi \times 3000 \text{Hz}$; le réseau est en $x = 700 \mu\text{m}$. Les paquets transmis et réfléchi oscillent dans le guide après avoir interagi avec le réseau. Au cours de ces oscillations, ils ne se dispersent quasiment pas. Il n'y a pas eu d'absorption de quanta transverse.

Lors de l'interaction d'un paquet d'onde avec un réseau incliné en présence d'un confinement fort, une partie du paquet atomique reste piégée un certain temps dans le réseau libérant des paquets réfléchis ayant absorbé des quanta transverses. Le paquet réfléchi est d'autant plus ralenti qu'il est excité transversalement, comme nous pouvons le voir sur la formule (5.4).

5.3.2 Amplification de la réflexion

Dans ce paragraphe, nous tentons une approche plus globale de la réflexion sur un réseau incliné en présence d'un confinement fort. Par rapport à l'étude des réseaux simples à une dimension (chapitre 3) et de manière similaire à l'étude des réseaux dépendant du temps, plusieurs phénomènes viennent modifier le schéma simple de la réflexion de Bragg. La figure (5.4) représente la réflexion en fonction de la vitesse incidente pour différents confinements. Nous comparons le résultat des simulations avec le réflexion d'une onde plane de même vitesse incidente pour un réseau de pas $d_{\text{ondeplane}} = \sqrt{2}d$ pour tenir compte de l'inclinaison du réseau par rapport au sens de la vitesse incidente des atomes. La

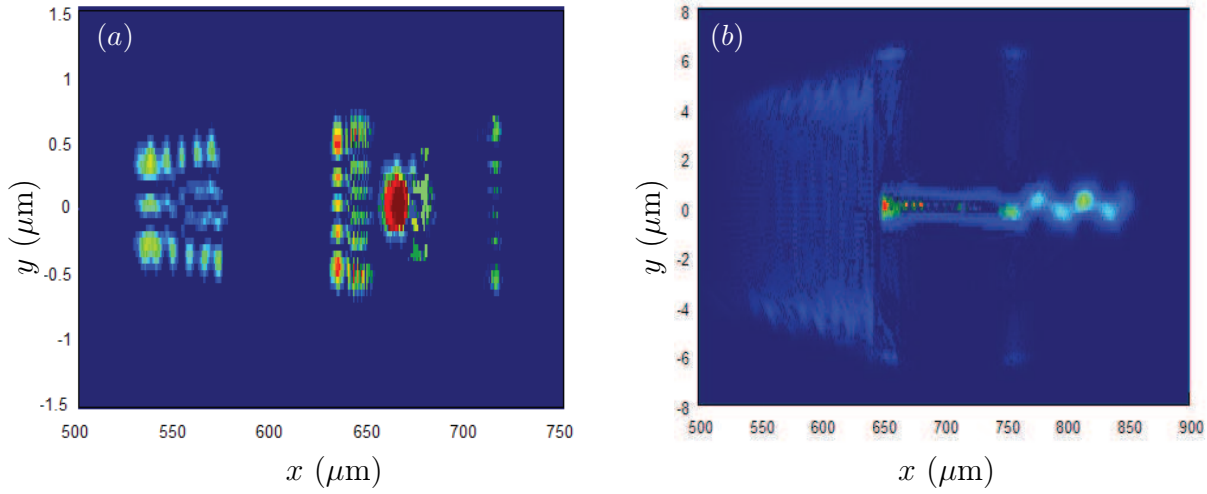


FIGURE 5.3 – (a) Densité de présence à $t = 22$ ms de l'exemple de la figure 5.2. La taille transverse selon l'axe y est corrélée au nombre de quanta absorbés. (b) Intégration sur le temps de la densité de présence. Le confinement transverse est $2\pi \times 3000$ Hz. Le paquet d'onde et le réseau sont identiques à ceux de la figure (5.2). Après interaction avec le réseau, les paquets réfléchis et transmis conservent leur taille transverse, mais ils oscillent dans le guide.

réflexion, comme attendu, est amplifiée avec la force de confinement. Cependant, ce type de courbe ne nous permet pas de distinguer les mécanismes de réflexion. La seule mesure de la réflexion en fonction de la force du confinement ne nous permet pas de détecter la présence d'un effet seuil. Dans les paragraphes suivants, nous tentons de mesurer l'amplitude des différents phénomènes qui viennent modifier la réflexion en fonction du confinement, à savoir : oscillation de la partie réfléchie dans le guide, excitation transverse (absorption de quanta) et piégeage dans le réseau.

5.3.3 Piégeage

Nous définissons une mesure du temps moyen de piégeage T_P de la fonction d'onde dans le réseau, comme l'intégrale sur le temps de la densité atomique présente dans le réseau :

$$T_P = \int dt \int_{\text{réseau}} d\mathbf{r} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (5.5)$$

La figure (5.5 (a)) présente T_P en fonction de la force de confinement. Pour nos paramètres, T_P est d'environ 16.3 ms lorsqu'il n'y a pas de piégeage à proprement parler, la fonction d'onde entre et ressort du réseau. Il existe sur cet exemple, une valeur seuil du confinement (ici $\omega_y/2\pi = 500$ Hz). À partir de cette valeur seuil, la phénoménologie n'est plus la même, la fonction d'onde "passe" plus de temps dans le réseau. L'observable définie dans ce paragraphe ne permet pas d'en dire plus. Est-ce le paquet d'onde absorbe et réémet des

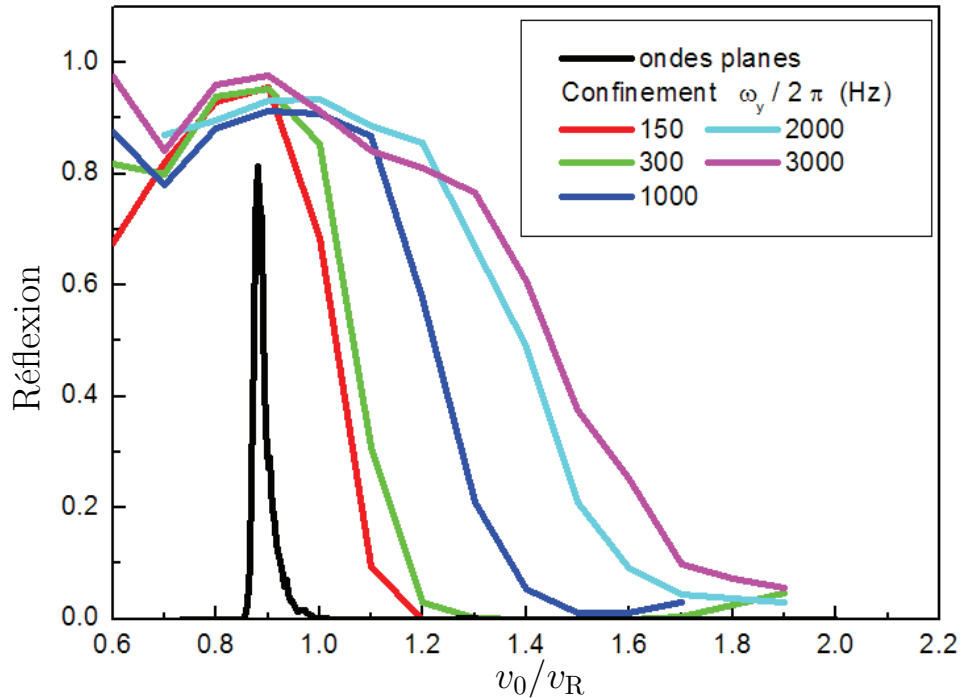


FIGURE 5.4 – Coefficients de réflexion d'un paquet d'ondes de vitesse initiale v_0 et de dispersion en vitesse $\Delta v(t) = 0.25 \text{ mm.s}^{-1}$ sur un réseau attractif ($q = 0.75$) avec une enveloppe gaussienne de waist $50 \text{ } \mu\text{m}$. En noir, la réponse pour une onde plane et en couleurs, la réponse pour différentes forces de confinement.

phonons transverses ?

5.3.4 Oscillations transverses de la partie réfléchie

Pour mesurer l'effet des oscillations de la partie réfléchie, nous introduisons la quantité A_R qui est l'amplitude de l'oscillation du centre de masse de la partie réfléchie, normalisée par la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique transverse a_y . La figure (5.5 (b)) présente A_R en fonction de la force du confinement. Pour des confinements très mous (ici $\omega_y/2\pi < 300 \text{ Hz}$), l'amplitude des oscillations diminuent, ce qui est une limite intuitive (les oscillations sont d'amplitude nulle en l'absence de confinement. Pour des confinements plus importants, l'amplitude des oscillations diminue, avec une valeur seuil qui est du même ordre de grandeur que pour le phénomène de piégeage ($\omega_y/2\pi = 500 \text{ Hz}$). La diminution drastique de l'amplitude des oscillations traduit, au niveau de la valeur seuil, un changement de comportement de l'interaction de la fonction d'onde avec le réseau, dû au confinement fort.

5.3.5 Quantification de l'absorption de quanta

L'absorption de quanta transverse est caractérisée, entre autre, par une diminution de la vitesse du paquet réfléchi par rapport à sa vitesse initiale. Pour caractériser l'absorption

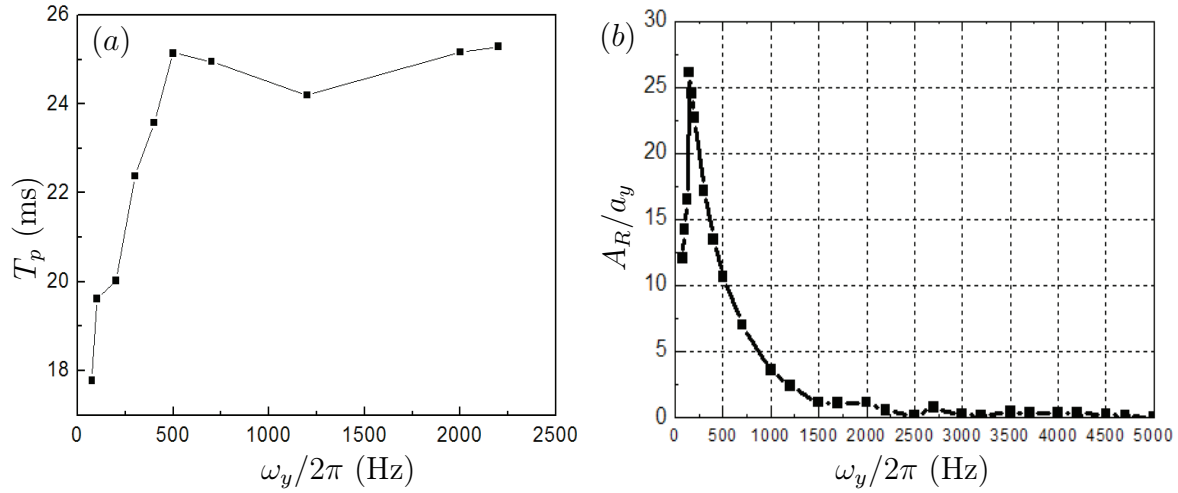


FIGURE 5.5 – (a) Temps de piégeage moyen dans le réseau (formule T_P (5.5)). (b) Amplitude de l'oscillation du paquet d'onde réfléchi. Le paquet d'onde et le réseau sont identiques à ceux de la figure (5.2).

de quanta en fonction du confinement, nous proposons de regarder le nombre moyen de quanta absorbés $\langle n \rangle$, de la partie réfléchie, défini à partir de la conservation de l'énergie :

$$\langle n \rangle = \frac{1}{2\hbar\omega_y} \left[v_0^2 - \left(\int_{v<0} v |\tilde{\Psi}(v, t = \infty)|^2 dv \right)^2 \right], \quad (5.6)$$

où $\tilde{\Psi}(v, t = \infty)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'onde en v , asymptotique, après interaction avec le réseau. Cette mesure ne distingue pas les différents paquets réfléchis, elle correspond à l'intégration de la transformée de Fourier en vitesse, sur toutes les vitesses négatives (donc réfléchies). Pour un confinement $\omega_y/2\pi = 3000$ Hz, nous avons vu, que la partie réfléchie comportait trois paquets ayant absorbé zéro, deux et quatre quanta ; la moyenne pondérée est $\langle n \rangle = 0.8$, voir figure (5.6). Sur cet exemple, pour une vitesse incidente particulière, il existe un seuil du niveau d'excitation de la partie réfléchie pour un confinement de $\omega_y/2\pi = 500$ Hz.

5.4 Approche en physique classique

Il est possible d'observer une réflexion également pour des particules classiques qui explorent le potentiel (guide + réseau optique à 45 degrés) que nous considérons ici, en dépit du fait que ce réseau corresponde à un potentiel attractif. Nos simulations classiques sont réalisées avec un algorithme symplectique (voir appendice (A)). La réflexion est dans ce cas due à un phénomène de chaos relié au fort couplage entre les différents degrés de liberté. La figure (5.7) représente un exemple de temps de piégeage moyen, formule (5.5), en fonction du confinement. Pour de faibles confinements, inférieurs à 1000 Hz, il n'y a aucun phénomène de piégeage dans le réseau. La dynamique commence à être chaotique

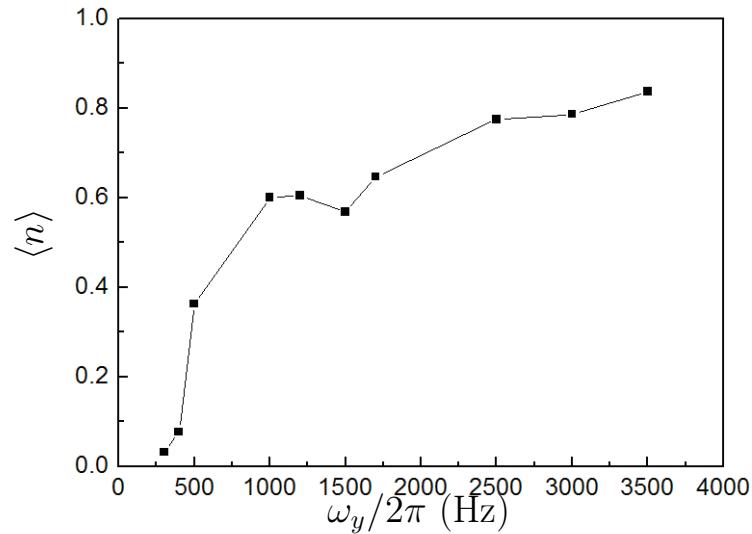


FIGURE 5.6 – Nombre moyen de quanta absorbés $\langle n \rangle$ de la fonction d'onde réfléchie, voir formule (5.6), en fonction de la force du confinement. Le paquet d'onde et réseau sont identiques à ceux de la figure (5.2).

pour des confinements supérieurs à 1200 Hz. La figure (5.8) compare la dynamique de la densité atomique piégée dans le réseau pour deux confinements représentatifs, 300 Hz et 5000 Hz. Le paquet atomique est proche du réseau et pénètre rapidement; toute la densité atomique y est piégée pendant environ 20 ms. Dans le cas du faible confinement, la dynamique de piégeage est purement quantique, il n'a aucun piégeage classique ($t > 25$ ms). Dans le cas du confinement fort, la dynamique de sortie ($t > 20$ ms) de la fonction d'onde quantique présente une partie purement quantique, non superposée à la courbe équivalente classique. La seconde partie traduit une dynamique chaotique identique pour les cas classique et quantique de sortie des atomes du réseau, où la loi de décroissance est exponentielle. Cet exemple permet, dans une certaine mesure, d'étudier la frontière entre comportement classique et quantique.

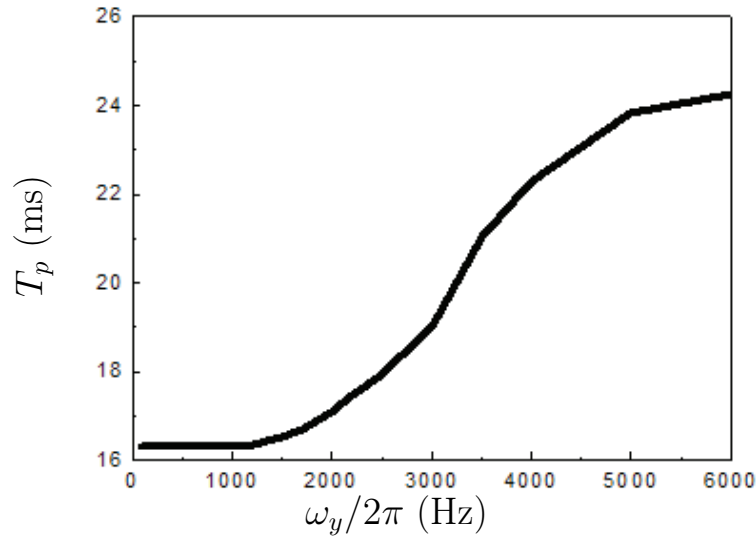


FIGURE 5.7 – Temps de piégeage moyen dans le réseau, voir formule T_P (5.5), pour des particules classiques. Le réseau est attractif de profondeur $q = 0.75$, d'enveloppe gaussienne de waist de $50 \mu\text{m}$. Le paquet atomique incident est un paquet gaussien de vitesse $v_0 = 1.1 v_R$ et de dispersion de vitesse longitudinale $\delta v_x = 0.35 \text{ mm.s}^{-1}$. Il est initialement dans le niveau fondamental du confinement transverse.

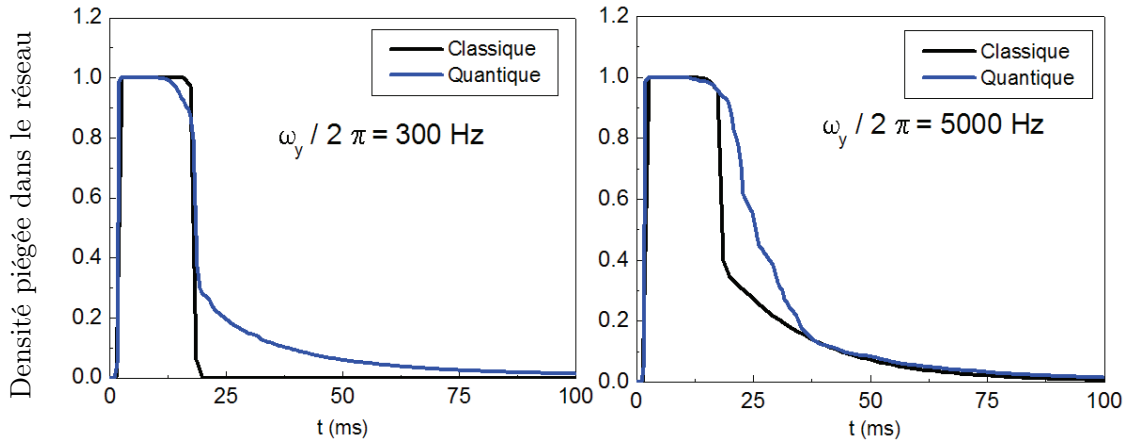


FIGURE 5.8 – Densités atomiques classique et quantique piégées dans le réseau en fonction du temps pour un guide de confinement de fréquence transverse de 3148 Hz et 5000 Hz . Le paquet atomique initial a une vitesse de $v_0 = 1.1 v_R$ et une dispersion en vitesse $\Delta v(t) = 0.25 \text{ mm.s}^{-1}$. Le réseau attractif ($q = 0.75$) avec une enveloppe gaussienne de waist $50 \mu\text{m}$. En noir, la simulation classique, en bleu la simulation quantique.

Conclusion

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du chapitre portant sur la diffusion d'une onde de matière sur un réseau (chapitre 3). Nous avons proposé ici un nouveau paramètre de contrôle qui est la force du confinement. Dans un premier temps, nous avons étudié et quantifié la nouvelle phénoménologie associée : piégeage dans le réseau, absorption de quanta transverses, oscillation de la partie réfléchie en fonction de la force du confinement. La multiplicité des phénomènes possibles, lors de l'interaction d'un paquet avec un réseau incliné en présence d'un confinement fort, ne nous a pas permis de proposer une approche predictive de la réflexion en fonction de la force du confinement. Nous avons montré, sur la base d'exemples, l'existence de seuil pour les différents phénomènes explicités. Toujours dans l'optique de contrôler la réflexion, il reste une question ouverte pour laquelle nous allons lancer des simulations numériques qui est celle de savoir s'il est possible de contrôler la population dans les différents modes réfléchis grâce à un réseau optique modulé en temps ? Y a-t-il un tel phénomène de résonance si, par exemple, la fréquence angulaire de modulation temporelle ω est de la forme $n\omega_y$? Cela réaliserait d'un certain point de vue une collision contrôlée.

Chapitre 6

Sonde atomique localement monochromatique

Introduction

Dans les chapitres (1) et (2) nous nous sommes intéressés à la dispersion de vitesse d'un condensat initialement piégé dans différentes configuration. L'objet de ce chapitre est de montrer qu'il est possible de sonder grâce à un paquet d'onde incident et avec précisions des potentiels ayant des résonances plus fines que la dispersion de vitesse du paquet d'onde, en l'absence ou en présence d'interactions. Pour ce faire, il est nécessaire que le paquet soit accéléré jusqu'au potentiel par un champ de force constant. L'effet est encore accru, lorsque les atomes subissent en plus un découplage progressif à partir de leur piège de confinement. Lors du déversement progressif des atomes du puits sur la pente, tous les atomes ne partent pas au même moment ce qui augmente la dispersion de vitesse instantanée $\Delta v(t)$ du paquet atomique. Cependant, lorsqu'ils arrivent à une distance d du puits initial en un point donné, pas nécessairement au même instant, ils ont tous à peu près la même vitesse, à une dispersion près que nous souhaitons évaluer. Dans un premier temps, nous allons donc définir, pour des paquets atomiques classique et quantique, la *dispersion de vitesse locale* pour des paquets atomiques en présence d'un champ de force constant et pour des paquets découplés. Lors de l'interaction d'un paquet atomique avec un potentiel local, c'est cette dispersion de vitesse locale qui contrôle *in fine* la réflexion. Pour illustrer ce phénomène, nous allons nous intéresser à un potentiel local particulier le plus simple possible présentant une résonance fine, un double pic de potentiel dont les résonances fines résultent d'un effet Fabry-Perot.

6.1 Dispersion de vitesse locale d'un paquet atomique

Dans cette partie, après un rappel sur la dispersion de vitesse globale qui est la quantité habituellement utilisée, nous proposons une définition de la *dispersion de vitesse locale* d'un paquet atomique. Nous calculons cette quantité, explicitement pour des paquets atomiques

en présence d'un champ de force constant pour les cas classique, quantique avec et sans interactions. Enfin, nous présentons les résultats numériques de la dispersion de vitesse locale d'un paquet d'onde après un processus de découplage optique. Le système d'étude est un paquet atomique, classique ou quantique, initialement sans vitesse, en présence d'un champ de force constant $m\gamma$, de dispersions initiales de position et de vitesse respectives : Δx_0 et Δv_0 . La distance d , par rapport au point initial, est la distance à laquelle nous mesurons la dispersion de vitesse locale et où nous placerons par la suite le potentiel double pic.

6.1.1 Rappels sur le comportement de la dispersion de vitesse globale après découplage

Dans ce paragraphe, nous rappelons les résultats principaux sur la dispersion de vitesse d'un paquet d'onde ayant subi un découplage. La quantité qui nous intéresse est la dispersion de vitesse asymptotique $\Delta v(t = \infty)$ après le processus de découplage. Dès que le paquet est entièrement découplé et ne ressent plus que le champ de force, la dispersion de vitesse du paquet d'onde est constante. Plusieurs paramètres contrôlent la valeur asymptotique de la dispersion de vitesse du paquet d'onde découplé :

- (i) La valeur de l'accélération γ . La valeur de l'accélération fixe le minimum de dispersion de vitesse accessible quelque soit la stratégie de découplage. Plus la pente est importante, plus ce minimum est important, voir chapitre (2), formule (2.29).
- (ii) Les interactions tendent toujours à augmenter la dispersion de vitesse asymptotique, il est possible de limiter leur incidence en considérant des découplages avec une phase d'ouverture adiabatique, voir chapitre (1).
- (iii) Le temps caractéristique de découplage a deux principaux effets. Plus le découplage est lent, plus la phase d'ouverture est adiabatique et par conséquent la dispersion de vitesse du paquet d'onde diminue. Cependant, pour des découplages avec des temps caractéristiques relativement longs, il existe une phase d'étirement de la fonction d'onde qui tend à augmenter la dispersion instantanée de vitesse du paquet d'onde, du fait que tous les atomes ne partent pas en même temps, voir chapitre (2), paragraphe (2.4.3).

Nous choisissons comme référence de dispersion de vitesse pour un paquet d'onde initial dans un puits donné, la dispersion de vitesse asymptotique obtenu après coupure brutale du potentiel confinant, nous notons cette grandeur Δv_c . Toutes les courbes de dispersion de vitesse de ce chapitre sont normalisées par Δv_c , ce qui nous permet de faire ressortir le gain obtenu, voir chapitre (2), courbe (2.10,b).

6.1.2 Dispersion de vitesse locale $\Delta v(d)$

Dans le cas de particules classiques ponctuelles, la dispersion de vitesse locale n'est autre que l'écart-type des vitesses mesurées en d .

L'objet de ce paragraphe est de généraliser cette définition lorsque l'on a accès unique-

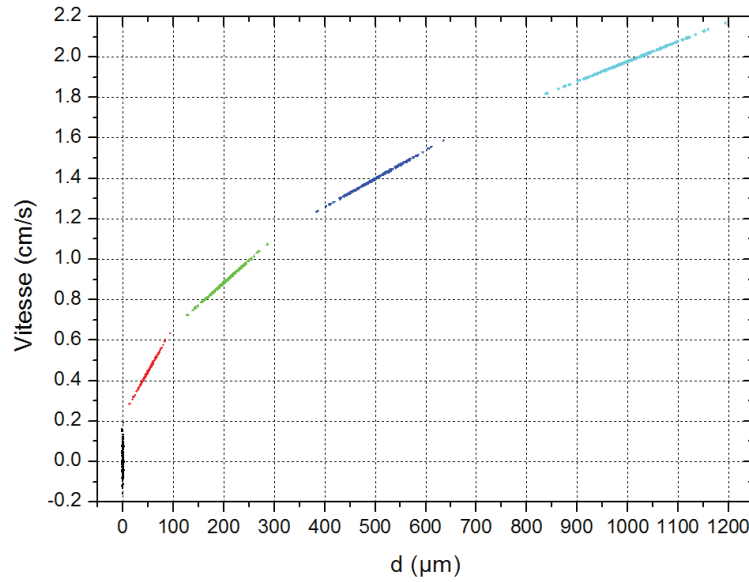


FIGURE 6.1 – Représentation dans l'espace des phases d'un nuage d'atomes classiques soumis à un champ de force constant, à différents instants.

ment à $P(x, t)$, la densité de probabilité de présence en x à l'instant t telle que $\int P(x, t)dx = 1$ et la vitesse moyenne des particules en d à l'instant t , $\bar{v}(d, t)$. Cette généralisation, nous sera utile dans le cas quantique. La quantité qui va nous permettre de définir l'expression de $\Delta v(d)$ est le courant de probabilité :

$$J(d, t) = \bar{v}(d, t)P(d, t), \quad (6.1)$$

soit le produit de la vitesse moyenne $\bar{v}(d, t)$ des particules en d à t par la densité de probabilité de ces particules. Le nombre de particules qui passe en d pendant un temps dt s'écrit $J(d, t)dt$. La condition de normalisation de J traduit le fait que toutes les particules passent par d en un temps fini grâce à l'accélération γ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(d, t)dt = 1. \quad (6.2)$$

Nous définissons la vitesse moyenne et la vitesse quadratique moyenne au point d par :

$$\begin{aligned} \langle v \rangle(d) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}(d, t)J(d, t)dt = \int_0^{\infty} \frac{J(d, t)^2}{P(d, t)}dt, \\ \langle v^2 \rangle(d) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}^2(d, t)J(d, t)dt = \int_0^{\infty} \frac{J(d, t)^3}{P(d, t)^2}dt. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Il en résulte l'expression de la dispersion au point d :

$$\Delta v(d) = \sqrt{\langle v^2 \rangle(d) - \langle v \rangle(d)^2}. \quad (6.4)$$

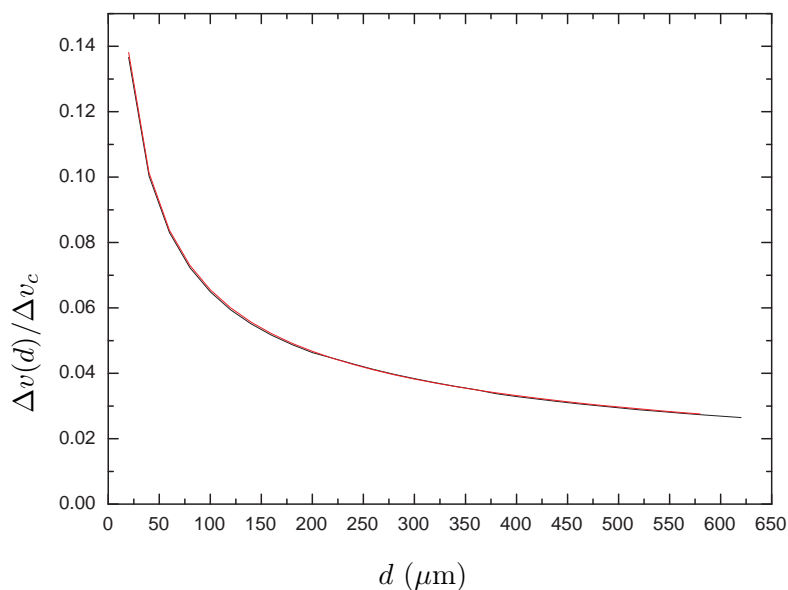


FIGURE 6.2 – *Dispersion locale des vitesses, normalisée par la dispersion obtenue après coupure brutale du potentiel confinant Δv_c , en fonction de la distance d dans le cas classique (courbe noire) et quantique (courbe rouge). La distribution de vitesses initiale est gaussienne $\Delta v_0 = \Delta v_c = 0.58 \text{ mm.s}^{-1}$. La pente, $\gamma = 0.2 \text{ m.s}^{-2}$. Les dispersions de vitesse locales classique et quantique sont identiques en présence d'un champ de force constant.*

6.1.3 $\Delta v(d)$ pour un paquet d'onde sur une pente

(a) Calcul explicite : cas classique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la dispersion de vitesse en un point donné pour une distribution initiale g_0 de positions et vitesses donnée. La manière la plus simple de la calculer est d'échantillonner numériquement la distribution initiale. En fonction des conditions initiales particulières de chaque particule, on connaît sa vitesse en d . En échantillonnant suffisamment la distribution initiale, nous obtenons la vitesse moyenne et la vitesse quadratique moyenne au point d et par conséquent la dispersion de vitesse au point d . Il est aussi possible, à partir de la distribution initiale de se ramener à la méthode générale décrite précédemment. Il est nécessaire de connaître la densité de particules au point d à l'instant t : $P(d, t)$ en fonction de la distribution initiale. A cette fin, nous allons calculer la densité de particules au point d ayant une vitesse v à l'instant t : $P(d, v; t)$, quantité que nous intégrerons ensuite sur v . Les particules, ayant au point d à l'instant t , une vitesse v sont entièrement déterminées par leurs conditions initiales :

$$x_0(d, v; t) = d - vt + \frac{gt^2}{2}, \quad \text{et} \quad v_0(d, v; t) = v - gt. \quad (6.5)$$

Nous en déduisons $P(d, v; t)$:

$$\int \int g_0(x_0, v_0) \delta \left(x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2} - d \right) \delta(v + gt - v_0) dx_0 dv_0 = g_0 \left(d - vt + \frac{gt^2}{2}, v - gt \right). \quad (6.6)$$

En intégrant sur l'ensemble des vitesses, on obtient la densité de probabilité de particules en d à l'instant t :

$$P(d, t) = \int_0^\infty P(d, v; t) dv, \quad (6.7)$$

et la vitesse moyenne des particules en d à l'instant t :

$$\bar{v}(d, t) = \int_0^\infty v P(d, v; t) dv. \quad (6.8)$$

A partir de ces expressions, nous obtenons le courant de probabilité, formule (6.1), la vitesse moyenne et la vitesse quadratique moyenne au point d , formule (6.3) et par conséquent la dispersion de vitesse au point d , formule (6.4). Nous n'avons pas trouvé de formes analytiques simples pour toutes ces expressions. La représentation du paquet atomique dans l'espace des phases, voir figure (6.1) permet de bien cerner la dispersion de vitesse locale. Le centre du paquet atomique suit les lois de mouvement classiques. L'inclinaison du paquet est due au fait que les atomes les plus rapides sont plus loin que le centre et les plus lents sont en arrière du centre. Dans l'espace des phases, le paquet est tangent à sa trajectoire. La dispersion de vitesse globale du paquet d'onde se lit, à un instant donné, sur l'axe vertical. Pour lire la dispersion locale, il faudrait représenter le paquet atomique à tous les instants, et la largeur du trait sur l'axe vertical représenterait la dispersion de vitesse locale. L'étalement dans la direction des x s'accompagne d'une compression dans l'espace des vitesses et par conséquent la moyenne des vitesses des atomes passant en un point d est plus faible que la dispersion de vitesse globale du paquet.

(b) Calcul explicite : cas quantique sans interactions

Nous reprenons ici la méthode des lois d'échelle et le formalisme hydrodynamique qui sont particulièrement adaptés au traitement de l'équation de Schrödinger pour ce problème. Nous étudions l'évolution d'un paquet d'ondes gaussien soumis à un champ de force constant d'accélération γ . Nous rappelons l'écriture de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ sous forme module-phase :

$$\Psi(x, t) = \sqrt{n(x, t)} e^{iS(x, t)} \text{ avec } v(x, t) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}. \quad (6.9)$$

avec $n(x, t)$ la densité d'atomes telle que $|\Psi(x, t)|^2 = n(x, t)$, et $v(x, t)$ le champ de vitesse. L'équation d'évolution de ces deux quantités s'écrit grâce au formalisme hydrodynamique sous la forme [4]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(nv) = 0 \quad \text{et} \quad m \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} - \frac{1}{2} m v^2 - m \gamma x \right]. \quad (6.10)$$

Nous choisissons l'ansatz en loi d'échelle suivant :

$$n(x, t) = \frac{1}{\lambda(t)} n_0 \left(\frac{x - x_0(t)}{\lambda(t)} \right) \quad \text{où} \quad n_0(x) = \left(\frac{1}{2\pi\Delta x_0^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{x^2}{2\Delta x_0^2} \right) \quad (6.11)$$

est la distribution initiale de positions et $x_0(t)$ rend compte du déplacement du centre du paquet. L'équation de continuité donne l'expression du champ de vitesse :

$$v(x, t) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} (x - x_0(t)) + \dot{x}_0(t). \quad (6.12)$$

Nous obtenons finalement les deux équations suivantes :

$$\ddot{x}_0(t) = -g, \quad \text{et} \quad \ddot{\lambda}(t) = \frac{\Omega^2}{\lambda(t)^3} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\hbar}{2m\Delta x_0^2}. \quad (6.13)$$

La première équation traduit le fait que le centre de la fonction d'onde gaussienne suit les lois du mouvement classique $x_0(t) = -gt^2/2$. La deuxième s'intègre exactement, soit en tenant compte des conditions initiales $\dot{\lambda}(0) = 0$ et $\lambda(0) = 1$: $\lambda(t) = \sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$.

En conclusion, l'évolution d'un paquet d'ondes gaussien sur une pente est celle d'un paquet d'onde qui s'étale avec le coefficient de dilatation $\lambda(t)$ comme dans l'espace libre et dont le centre se déplace avec les lois classiques du mouvement. La résolution au moyen des lois d'échelle donne accès directement à la vitesse $v(x, t)$ en tout point x (6.12) et à la densité locale de présence $n(x, t)$ qui sont les deux quantités nécessaires pour calculer le courant de probabilité

$$J(x, t) = v(x, t)n(x, t) = \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} (x - x_0(t)) + \dot{x}_0(t) \right) \frac{1}{\lambda(t)} n_0 \left(\frac{x - x_0(t)}{\lambda(t)} \right). \quad (6.14)$$

Nous obtenons ainsi la vitesse moyenne $\langle v \rangle(d)$ et quadratique au point d $\langle v^2 \rangle(d)$ et par suite la dispersion de vitesse au point d grâce à la formule (6.4). La figure (6.2) présente un exemple la dispersion de vitesse locale en fonction de la distance d au point initial, normalisée par la dispersion de vitesse initiale qui est aussi la dispersion de vitesse obtenue après coupure brutale du puits. La dispersion en un point donné est très inférieure à la dispersion initiale des vitesse. Ceci résulte de la compression dans l'espace des phases induite par la propagation en présence d'un champ de force constant. La vitesse moyenne augmente avec la distance, et par conséquent la dispersion relative autour de cette vitesse diminue. Comme pour la dispersion de vitesse globale, la dispersion de vitesse locale est identique dans le cas quantique et classique en présence d'un champ de force constant.

Variation de la dispersion de vitesse locale

Dans ce paragraphe, nous regardons l'effet de la valeur de la pente γ et de la distance d sur la dispersion de vitesse locale d'un paquet atomique. Dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que le paquet initial a une dispersion de position nulle. La dispersion

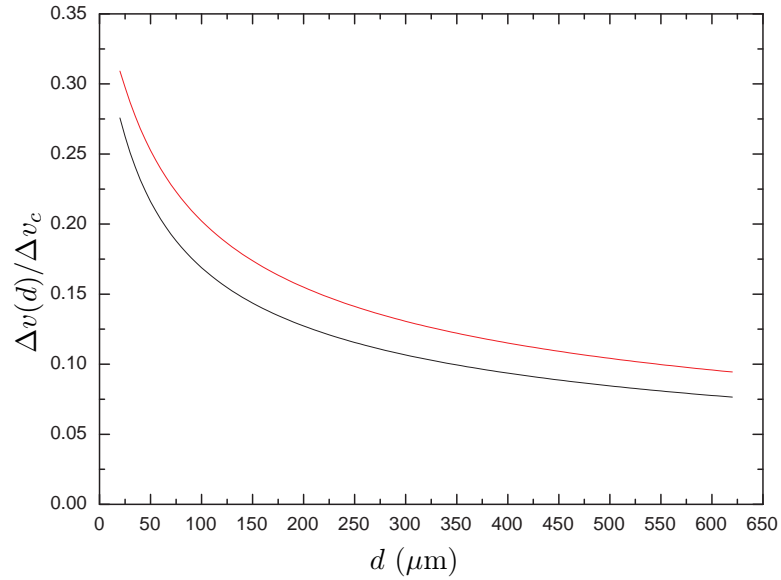


FIGURE 6.3 – *Dispersions des vitesses locales en fonction de la distance d , d'un paquet d'ondes en présence d'interactions en présence d'un champ de force d'accélération constante $\gamma = 0.2 \text{ m.s}^{-2}$. Les forces des interactions sont $g_1 N_0 = 60$ (courbe noire) et $g_1 N_0 = 120 \hbar^{3/2} \text{m}^{-1/2} \text{s}^{1/2}$ (courbe rouge). Ces dispersions sont normalisées par la dispersion de vitesse Δv_C obtenue dans le cas d'une coupure brutale du potentiel confinant.*

de vitesse locale en d est donnée par :

$$\Delta v(d) = \sqrt{\Delta v_0^2 + 2\gamma d} - \sqrt{2\gamma d}. \quad (6.15)$$

Nous retrouvons un résultat intuitif, la dispersion de vitesse est croissante en fonction de la dispersion de vitesse initiale et décroissante avec la pente et la distance. La figure (6.2) représente la dispersion de vitesse locale en fonction de la distance d . Pour une distance $d = 200 \mu\text{m}$, la dispersion de vitesse locale est 20 fois plus faible que la dispersion de vitesse globale $\Delta v(t = \infty)$. Lorsque l'on prend en compte l'effet de la dispersion de position initiale, cette loi est mise à défaut pour des paquets atomiques limités avec une très faible dispersion de vitesse initiale. En effet, dans ce cas la relation d'Heisenberg implique une très grande dispersion de position initiale. Dans ce cas, tous les atomes ne parcourent pas une distance d , mais la distance de leur point de départ particulier au point d . Dans cette limite, plus la dispersion de vitesse initiale diminue, plus la dispersion de vitesse locale augmente.

(c) Calcul explicite : cas quantique en présence d'interactions

Nous nous également intéressons ici à l'évolution d'un paquet d'ondes dont le confinement harmonique initial est brusquement coupé. Le paquet est comme dans le cas précédent soumis à un potentiel d'accélération constante. Le confinement initial, dans le cas

de l'étude des propriétés d'un champ de force constant, permet de déterminer la fonction d'onde initiale. Les équations hydrodynamiques s'écrivent maintenant sous la forme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(nv) = 0 \quad \text{et} \quad m \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} - \frac{1}{2} m v^2 - m g x - g_1 n \right], \quad (6.16)$$

où le terme g_1 prend en compte les interactions sous la forme d'un terme de champ moyen, (voir chapitre (1), définition (1.20)). Nous nous plaçons dans la suite dans la limite de Thomas-Fermi (voir chapitre précédent) qui nous permet de supprimer le terme de pression quantique ($\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n}$). Cette approximation est valable pour des condensats comportant un grand nombre d'atomes e.g. $N > 5000$ pour le rubidium 87 [4]. Nous allons résoudre ce problème par la méthode des lois d'échelle, nous cherchons donc une solution pour laquelle la fonction d'onde reste identique au cours de son évolution à un facteur d'échelle près $\lambda(t)$. Nous choisissons comme ansatz :

$$n(x, t) = \frac{1}{\lambda(t)} n_0 \left(\frac{x - x_0(t)}{\lambda(t)} \right), \quad n_0(x) = \frac{3}{4R} \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right) \quad (6.17)$$

où $x_0(t)$ traduit le fait que la fonction d'onde descend le long de la pente et n_0 la distribution à l'équilibre à $t = 0$ de taille caractéristique R .

Nous posons $u = (x - x_0(t))/\lambda(t)$, l'équation de continuité donne le champ des vitesses, identique au cas sans interactions

$$v(x, t) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} (x - x_0(t)) + \dot{x}_0(t), \quad (6.18)$$

et l'équation d'Euler

$$\ddot{x}_0(t) + \frac{(x - x_0(t)) \ddot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = -g + \omega_0^2 \frac{(x - x_0(t))}{\lambda(t)^3}, \quad (6.19)$$

où ¹ $\omega_0 = \sqrt{\frac{3\tilde{g}N}{2mR^3}}$. Nous obtenons finalement deux équations :

$$\ddot{x}_0(t) = -g, \quad \text{et} \quad \ddot{\lambda}(t) = \frac{\omega_0^2}{\lambda(t)^2}. \quad (6.20)$$

La première équation s'intègre immédiatement en : $x_0(t) = -gt^2/2$. L'intégrale première de la deuxième s'écrit en tenant compte des conditions initiales $\dot{\lambda}(0) = 0$ et $\lambda(0) = 1$:

$$\dot{\lambda}(t)^2 = \sqrt{2\omega_0^2} \sqrt{\frac{\lambda(t) - 1}{\lambda(t)}}. \quad (6.21)$$

1. voir chapitre 1.

En séparant les variables, nous obtenons l'équation suivante :

$$\int_{\lambda(t=0)=1}^{\lambda(t)} \sqrt{\frac{y}{y-1}} dy = \int_0^t \sqrt{2\omega_0^2} dt'. \quad (6.22)$$

Nous effectuons le changement de variable $u^2 = y - 1$ et nous obtenons l'équation implicite qui nous donne $\lambda(t)$:

$$\ln(\sqrt{\lambda(t) - 1} + \sqrt{\lambda(t)}) + \sqrt{(\lambda(t) - 1)\lambda(t)} = \sqrt{2}\omega_0 t. \quad (6.23)$$

A chaque temps t , on déduit de la résolution de cette équation implicite la valeur de $\dot{\lambda}(t)$ (6.21). Nous en déduisons l'expression du champ de vitesse $v(x, t)$ (6.12) en tout point x et de la densité locale de présence $n(x, t)$ (6.11) qui sont les deux quantités nécessaires pour calculer $\Delta v(d)$, voir formule (6.4). La figure (6.3) représente $\langle v \rangle(d)$ en fonction de la distance d pour deux forces d'interaction différentes. Comme dans le cas sans interactions, la dispersion de vitesse locale est décroissante avec la distance. A une distance donnée, plus la force des interactions est importante, plus la dispersion de vitesse locale est importante. en effet, la conversion de l'énergie d'interaction en énergie cinétique augmente la dispersion de vitesse globale et donc la dispersion locale. Par rapport au cas sans interaction (figure 6.2), la présence des interactions diminue le gain entre la dispersion de vitesse globale et locale. En conclusion, l'effet d'un champ de force constant permet de diminuer la dispersion de vitesse locale. Dans les parties suivantes, nous allons étudier l'effet d'un déversement progressif des atomes sur la pente (découplage).

6.1.4 Dispersion de vitesse locale d'un paquet d'onde après un découplage

Dans cette partie, nous regardons la dispersion de vitesse locale d'un paquet d'onde après découplage. Les effets de la sortie des atomes du puits viennent s'ajouter aux effets de la pente γ , des caractéristiques du paquet initial et de la distance d . Nous reprenons le potentiel explicité dans le chapitre sur le découplage (2.1). Nous considérons dans ce chapitre uniquement la fonction de découplage exponentiellement décroissante. La figure (6.4,a) rappelle un exemple de dispersion des vitesse asymptotique après découplage. Pour des temps caractéristiques τ très courts (ici $\tau < 5$ ms), la dispersion de vitesse globale asymptotique bénéficie de l'ouverture du puits, il n'y pas de phase d'étirement. Pour des temps caractéristiques plus importants, la phase d'étirement augmente considérablement la dispersion de vitesse globale. La partie (b) représente la dispersion de vitesse locale (en $d = 200 \mu\text{m}$) associée. Pour des temps caractéristiques faibles (ici $\tau < 5$ ms), le découplage est d'autant plus adiabatique qu'il est lent, ce qui tend à augmenter la dispersion de position initiale et par conséquent la dispersion de vitesse locale en d , comme nous l'avons expliqué précédemment (paragraphe 6.1.3). Pour des temps caractéristiques plus longs, le régime d'ouverture adiabatique est atteint, la dispersion de position initiale n'augmente plus. La dispersion de vitesse locale diminue lorsqu'il existe une phase d'étirement (ici $\tau > 5$ ms) car

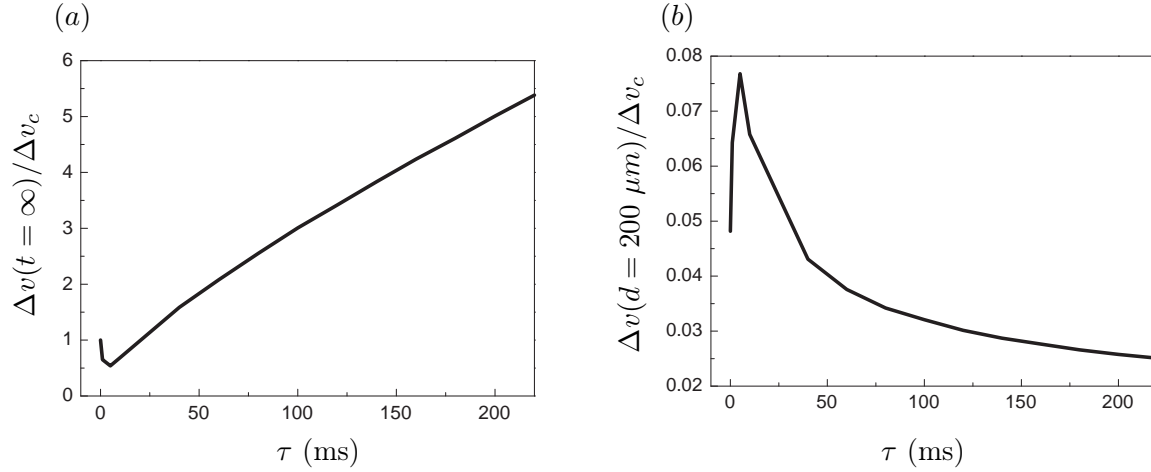


FIGURE 6.4 – (a) Dispersion de vitesse globale asymptotique après découplage. (b) Dispersion de vitesse locale en $d = 200 \mu m$, en fonction du temps caractéristique de découplage. Les courbes sont normalisées par la dispersion de vitesse obtenue après coupure brutale du potentiel confinant. La fonction de découplage est exponentielle décroissante. Les caractéristiques du potentiel sont : $U_0/k_B = 2.2 \mu K$, $w_0 = 30 \mu m$ et $\gamma = 0.6 m.s^{-2}$ avec les notations du chapitre découplage. Pour des temps caractéristiques de découplage longs, alors que la dispersion de vitesse du paquet est importante (cinq fois la valeur initiale), la dispersion locale reste faible (inférieure à trois pourcent de la valeur obtenue en cas de coupure brutale du potentiel confinant). Pour ces paramètres $\Delta v_c = 0.6 mm.s^{-1}$.

la vitesse de départ des atomes se rapproche de la vitesse nulle. La mesure de la dispersion de vitesse locale permet de bien cerner le caractère *localement* monocinétique des lasers à atomes, alors que la valeur asymptotique de la dispersion de vitesse $\Delta v(t = \infty)$ est une fonction croissante pour des temps de découplage τ long. Pour des temps caractéristiques suffisamment longs (ici $\tau > 40$ ms), le découplage a pour effet de diminuer encore la dispersion de vitesse locale par rapport à un simple champ de force constant. Par exemple, nous gagnons un facteur deux, pour $\tau = 150$ ms.

Représentation de Wigner

La représentation de Wigner (voir appendice (D)) permet d'appréhender à la fois la dynamique de la fonction d'onde dans l'espace réel et l'espace des vitesses. La figure (6.5) représente la transformée de Wigner du paquet d'onde atomique à trois instants : dans le puits pendant la phase d'ouverture, juste après le découplage et pendant la phase sur la pente. Le découplage crée une corrélation position-vitesse. La projection du paquet sur l'axe des vitesses, nous donne une idée de la dynamique de la largeur en vitesse du paquet et nous permet de mesurer la valeur asymptotique de dispersion de vitesse $\Delta v(t)$ après découplage. La figure (6.6) représente la somme, à tous les instants, de toutes les transformées de Wigner du paquet atomique lors du découplage pour deux temps caractéristiques (a) $\tau = 1$ ms et (b) $\tau = 10$ ms. La fonction de découplage est une exponentielle décroissante. Par

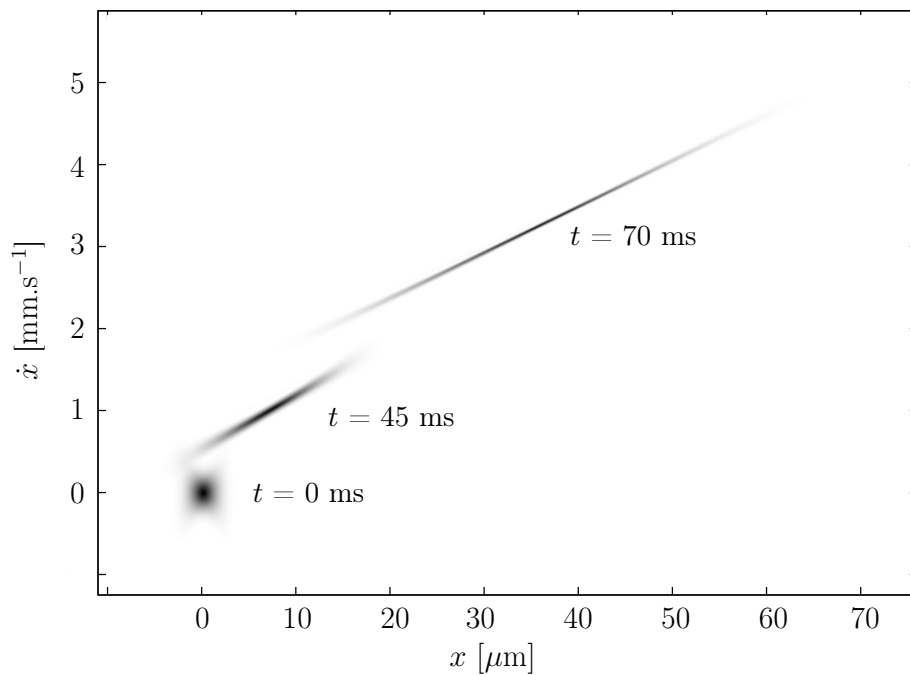


FIGURE 6.5 – Fonction de Wigner à différents instants du découplage pour $f(t) = \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = 10$ ms.

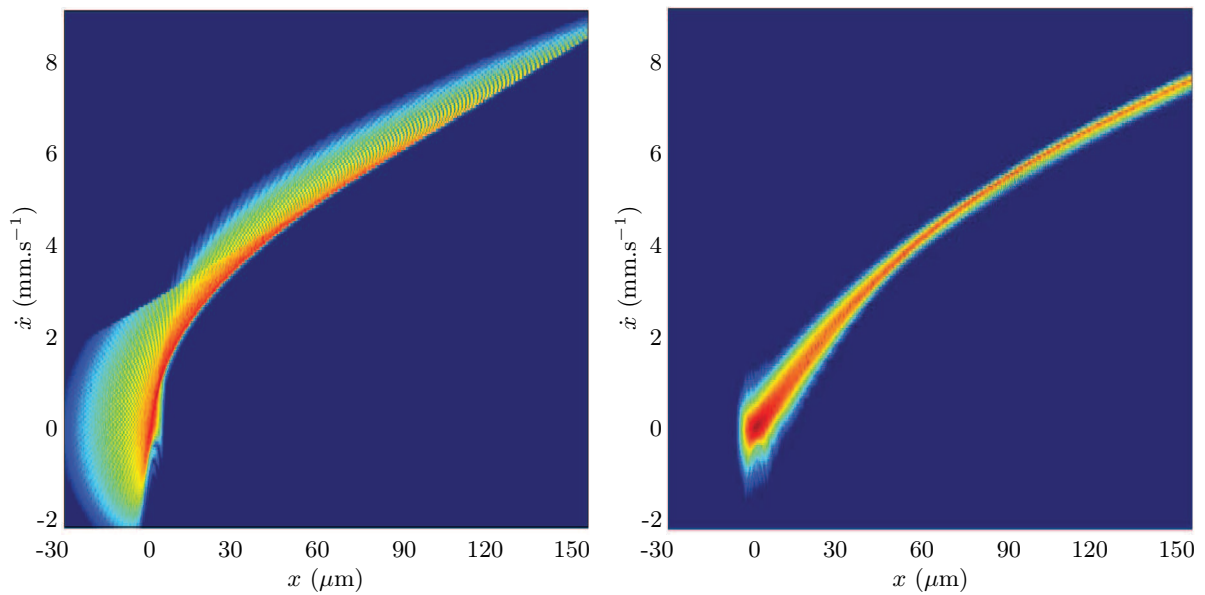


FIGURE 6.6 – Intégrale au cours du temps de la fonction de Wigner. La fonction de découplage est une exponentielle décroissante où (a) $\tau = 1$ ms et (b) $\tau = 10$ ms. La largeur à une position donnée permet d'évaluer visuellement la valeur de la dispersion de vitesse locale et montrer par suite l'intérêt d'un découplage progressif.

conséquent, à un endroit donné, la largeur selon l'axe des vitesses de l'intégrale temporelle de la transformées de Wigner correspond à la dispersion de vitesse locale. Alors que la

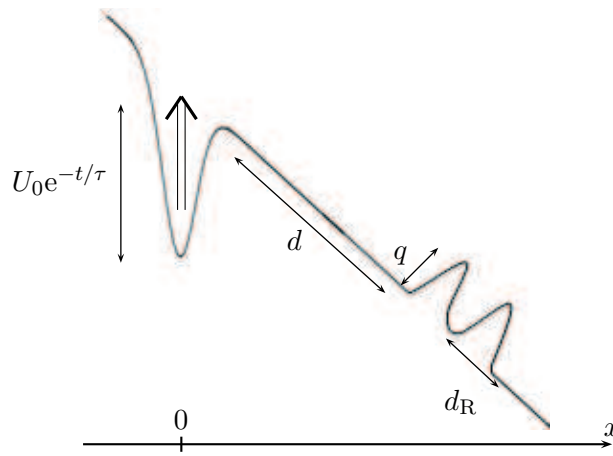


FIGURE 6.7 – Schéma de principe de l'expérience de diffraction sur un potentiel double pic répulsif.

valeur asymptotique de la dispersion de vitesse est quasiment identique pour ces deux valeurs de τ (voir figure 2.10(b)), la largeur du paquet intégré à un endroit donné est plus large pour le découplage le moins adiabatique avec $\tau = 1$ ms pour cet exemple.

6.2 Sonder une résonance en vitesse plus fine que la dispersion de vitesse globale

Dans cette partie, nous étudions le potentiel le plus simple possible qui présente une résonance fine de la transmission de la fonction d'onde en fonction de la hauteur, afin de tester et d'appliquer l'utilité de la mesure locale de la dispersion de vitesse.

6.2.1 Système présentant une résonance fine : potentiel double pic

Nous avons choisi un réseau répulsif de deux périodes d_R , de hauteur q (en unité E_R définie à partir de la période d_R), placé à une distance d du puits initial, voir figure (6.7). Le potentiel s'écrit :

$$U(x, t) = m\gamma x - U_0 e^{-t/\tau} e^{\frac{-2x^2}{w_0^2}} + 2qE_R(1 + \sin(2\pi x/d_R))\tilde{\Theta}(x, d, 2d_R). \quad (6.24)$$

où $\tilde{\Theta}(x, d, 2d_R)$ est la fonction Heaviside centrée en d de largeur $2d_R$. Les valeurs numériques choisies pour les différents paramètres sont : $d = 200 \mu\text{m}$, $d_R = 0.48 \mu\text{m}$, $\gamma = 0.6 \text{ m.s}^{-2}$, $U_0/k_B = 2.2 \mu\text{K}$ et $w_0 = 30 \mu\text{m}$. Ces différents paramètres imposent la vitesse du paquet d'onde lors de l'interaction avec le double pic à être : $v_0 = 15.3 \text{ mm.s}^{-1}$. Le paquet d'onde est accéléré par la pente, donc si nous voulons faire varier la vitesse, nous devons faire varier la distance d , ce qui a aussi pour conséquence de faire varier la dispersion de vitesse globale. Or c'est précisément cette quantité que nous souhaitons mesurer. C'est pourquoi, nous avons choisi de sonder la résonance en variant la hauteur q .

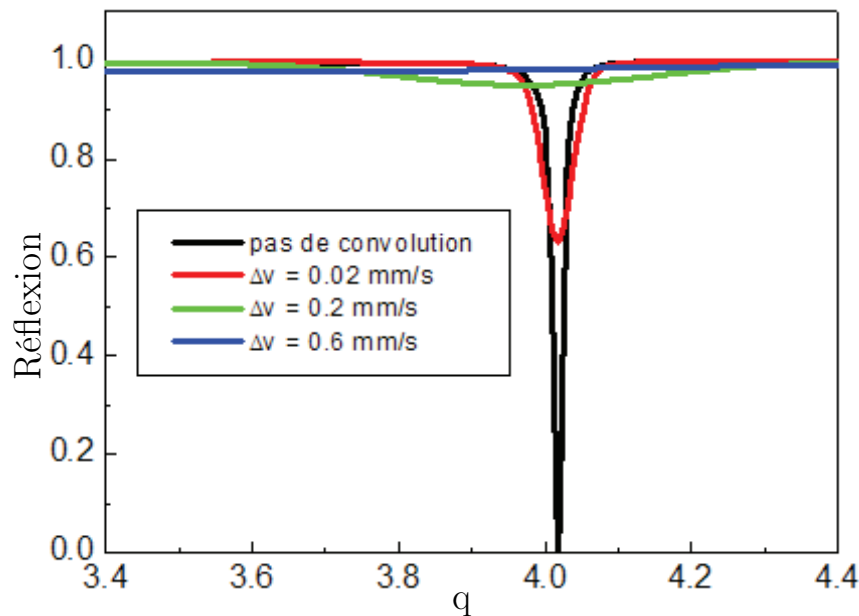


FIGURE 6.8 – **Courbe noire** Coefficients de réflexion en fonction de la hauteur du double pic q pour une onde plane de vitesse identique à celle des paquets d'onde descendant la pente avant d'aborder le double pic. **Courbes couleurs** Coefficients de réflexion pour des paquets d'onde de dispersion de vitesse Δv . Le système présente une résonance ($q = 4.02$) en transmission. Ces différentes courbes nous permettent d'évaluer la dispersion de vitesse nécessaire du paquet d'onde pour observer cette résonance.

La figure (6.8) représente le coefficient de réflexion en fonction de la hauteur normalisée du double pic q (courbe noire), calculée pour une onde plane de vitesse v_0 équivalente à celle d'un paquet d'onde accéléré sur une distance d par un champ de force constant γ (avec les valeurs numériques précédentes). La méthode numérique est présentée en appendice (B). Le système présente une fenêtre de transmission totale autour de la valeur $q = 4.02$. Cette courbe seule ne permet pas de voir la finesse en vitesse nécessaire pour sonder cette résonance de transmission. Nous avons représenté en différentes couleurs, les coefficients de réflexion convolués par une dispersion en vitesse Δv autour de v_0 , chapitre (3). Ces courbes correspondent à la réflexion en fonction de la profondeur pour des paquets d'onde de vitesse v_0 et non accélérés par une pente. Dès une dispersion de vitesse de 0.2 mm.s^{-1} , la résolution de la résonance est quasiment nulle. Sur notre dispositif expérimental, les meilleures dispersions de vitesse sont de l'ordre de 1.7 mm.s^{-1} , il nous est donc impossible de sonder cette résonance sans considérer la dispersion de vitesse locale du paquet d'onde. La résonance de transmission sondée correspond à une transmission non classique, mais à une résonance de Fabry-Perot quantique ; l'énergie cinétique est trois fois plus faible que la hauteur de la barrière.

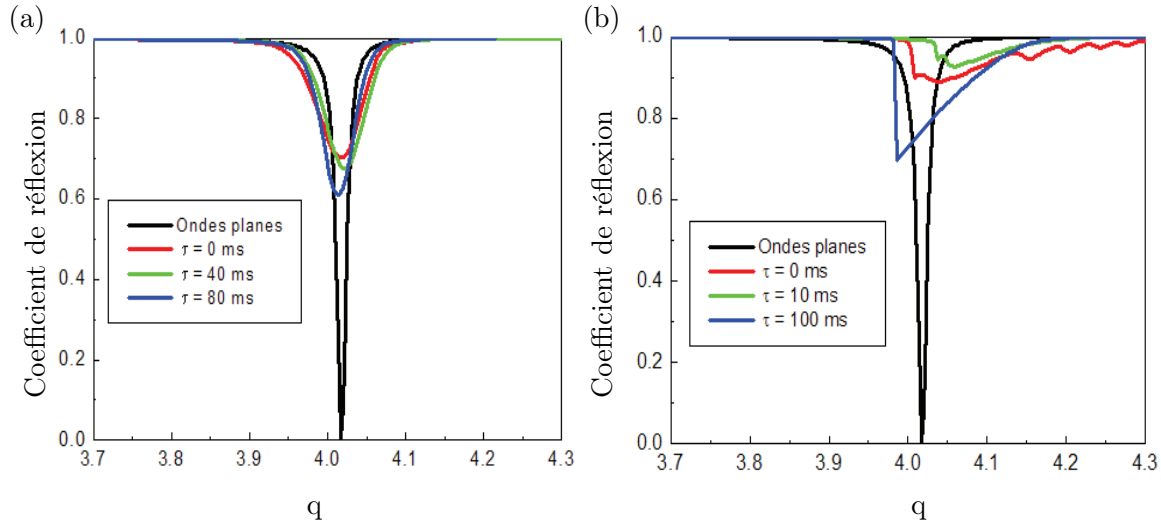


FIGURE 6.9 – Coefficient de réflexion du paquet d'onde en fonction de la hauteur q pour différents temps caractéristiques de découplage. (a) En l'absence d'interaction. (b) En présence d'interactions.

6.2.2 Diffusion d'un paquet d'onde découplé sur un potentiel double pic

Dans ce paragraphe qui constitue le résultat principal de ce chapitre, nous montrons qu'il est possible de sonder la résonance précédente avec un paquet d'onde de dispersion de vitesse globale large. Nous considérons un paquet d'onde découplé, et nous reprenons les caractéristiques du découplage qui ont été présentées en première partie, voir figure (6.4). Ce paquet d'onde aborde le potentiel double pic. La figure (6.9) représente le coefficient de réflexion en fonction de la hauteur du potentiel q . Nous distinguerons les cas avec et sans interactions. Nous avons choisi de représenter la réflexion, par conséquent, la résonance est d'autant mieux sondée que la réflexion est proche de 0. **Cas (a)** Sans interactions. Pour $\tau = 0$ ms, c'est-à-dire sans découplage, la dispersion de vitesse globale est de 0.6 mm.s^{-1} et la transmission maximum est d'environ 30%. En l'absence de pente, la dispersion de vitesse globale et locale sont identiques et par conséquent la transmission maximum serait d'environ 1%, voir figure (6.8). Pour les autres courbes, nous regardons l'effet du découplage sur la résolution de la résonance. Le fait de découpler lentement les atomes permet d'augmenter la transmission maximum, elle atteint presque 40% pour $\tau = 80$ ms. La figure (6.10, a) représente la réflexion minimum (transmission maximum) en fonction du temps caractéristique de découplage. Les variations sont identiques à celles de la dispersion de vitesse locale $\Delta v(d)$, voir figure (6.4, b). *La dispersion de vitesse locale contrôle la transmission.* **Cas (b)** En présence d'interactions, la force des interactions est de $g_1 N_0 = 30 \hbar^{3/2} \text{ m}^{-1/2} \text{ s}^{1/2}$. Pour $\tau = 0$ ms, c'est-à-dire sans découplage, la dispersion de vitesse globale est de 3.2 mm.s^{-1} , la transmission maximum est d'environ 10%. La courbe du coefficient de réflexion en fonction de q présente une dissymétrie qui n'est pas directement dues aux interactions inter-atomiques lors de l'interaction du paquet atomique avec le potentiel mais

à la corrélation position-vitesse induite par les interactions. En effet, nous avons testé le fait d'éteindre le terme de Gross-Pitaevskii numériquement juste avant l'interaction avec le potentiel double pic ce qui ne modifie pas le profil asymétrique. Le paquet est dilué et l'énergie d'interaction est, dans ce cas, négligeable. Lorsque la fonction présente un profil de type proche de Thomas-Fermi, le potentiel double pic ne traite pas les classes de vitesse de manière indépendante. Nous confirmons cette hypothèse en représentant la densité atomique ($q = 3.9$ et $\tau = 0$ ms), avant ($t = t_1$) et après ($t = t_2$) l'interaction avec le double pic. Avant l'interaction, nous reconnaissons le profil proche de la parabole inversée, ce profil est dissymétrisé après l'interaction. Dans le cas d'un paquet d'onde gaussien de même dispersion de vitesse, il n'y a pas de dissymétrie du profil après interaction avec un double pic. Lorsqu'on augmente le temps caractéristique de découplage, la résonance de transmission est presque sondée aussi finement que dans le cas sans interactions, voir figure (6.4, a), alors que la dispersion de vitesse globale est cinq fois plus importante.

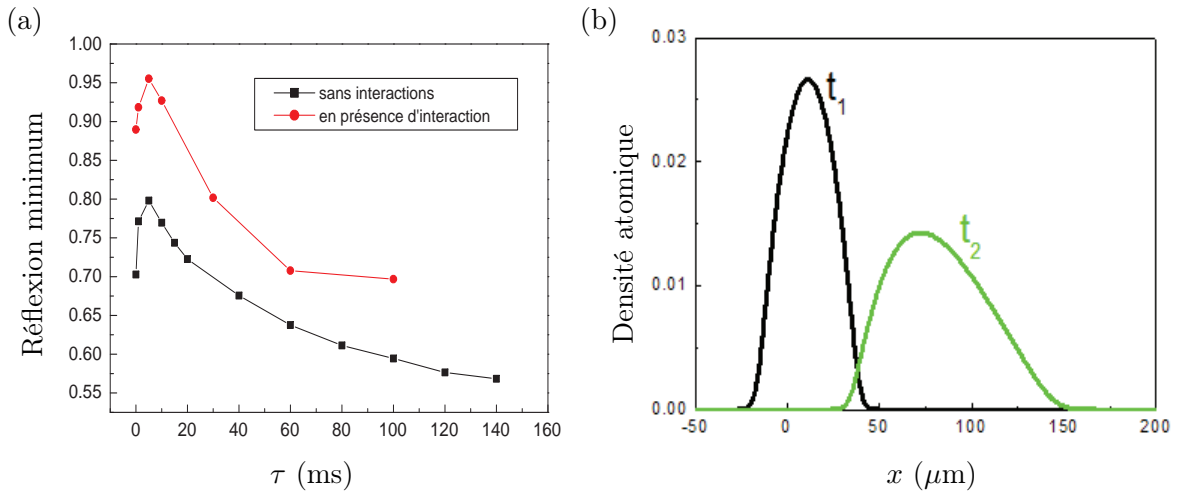


FIGURE 6.10 – (a) Transmission maximum du paquet d'onde en fonction du temps de découplage τ , dans les cas avec et sans interactions. Les variations sont dictées par les variations de la dispersion de vitesse locale (6.4, b). Profils atomique avant et après l'interaction avec le double pic, la hauteur est $q = 3.9$ et il n'y a pas de découplage ($\tau = 0$ ms). L'interaction avec le double pic dissymétrise le profil atomique.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré la nécessité de mesurer autrement la dispersion de vitesse lorsque le paquet d'onde est en présence d'un champ de force. Nous avons proposé une mesure de la dispersion de vitesse *locale* qui permet de cerner le caractère monocinétique localement d'un paquet atomique. Nous avons montré qu'il est possible de sonder une résonance de transmission plus fine en vitesse que la dispersion de vitesse *globale* du paquet d'onde où c'est la dispersion locale qui contrôle la transmission. De manière générale, il existe d'autres moyens pour diminuer ou contourner la dispersion de vitesse du paquet d'onde. Signalons notamment la rotation dans l'espace des phases du paquet d'onde par impression d'une phase quadratique qui permet de diminuer effectivement la dispersion de vitesse globale du paquet d'onde [58].

Chapitre 7

Observation de la suppression des oscillations de Rabi pour des atomes en mouvement

Ce chapitre propose un exemple de diffusion d'un paquet atomique où l'on considère un couplage entre degrés de liberté externe et interne. La suppression des oscillations de Rabi pour des atomes en mouvement, proposée par le groupe de G. Muga [59], consiste à transposer dans l'espace l'opération habituellement faite dans le temps. Les oscillations de Rabi sont traditionnellement réalisées par une impulsion de champ électromagnétique sur un atome. Ici on considère un atome qui se déplace et qui se propage vers une zone où le champ électromagnétique est présent. Le couplage du centre de masse du système et l'interaction avec un champ laser donne lieu à de nouveaux effets physiques. Entre autres, il est ainsi possible de supprimer les oscillations de Rabi et de contrôler la projection du système sur un état pur. Après avoir rappeler la physique des oscillations de Rabi et poser les notations, nous présenterons les conditions de *suppression des oscillations de Rabi* pour des ondes planes. La deuxième partie de ce chapitre constitue une étude de faisabilité pour notre dispositif expérimental où l'on prend en compte par exemple la taille finie du paquet d'onde ou encore les contraintes liées à la détection.

7.1 Suppression des oscillations de Rabi pour des atomes en mouvement

7.1.1 Contexte du problème

Considérons un système à deux niveaux ($|1\rangle$ et $|2\rangle$) dont le centre de masse se déplace sur une droite, où la partie $x > 0$ est illuminée par un laser parfaitement accordé sur la transition atomique ω_a . Soit k_0 l'impulsion initiale du système, nous considérons le cas d'un système dont la position initiale se trouve hors zone laser et se dirigeant vers la zone laser dans l'état $|1\rangle$, voir figure (7.1). En représentation d'interaction, l'hamiltonien du système

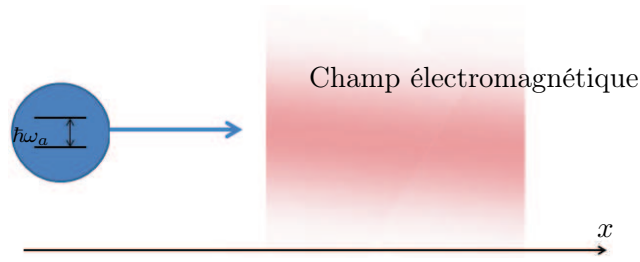


FIGURE 7.1 – Schéma de principe. Un atome, à deux niveaux, se propage vers un champ électromagnétique accordé sur la transition atomique.

s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega\Theta(\hat{x}) \\ \Omega\Theta(\hat{x}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

où Θ est la fonction de Heaviside, Ω la constante de couplage atome-laser (pulsation de Rabi). Soit $\mathcal{P}_{12}(t)$, la probabilité de trouver le système à l'instant t dans l'état $|2\rangle$. Cette probabilité oscille avec une période $T = 2\pi/\Omega$. Ce sont les oscillations temporelles de Rabi.

Oscillations spatiales pour des atomes en mouvement

L'article [59] introduit la probabilité de densité spatiale intégrée sur le temps :

$$I(x) = \int dt \mathcal{P}_{12}(x, t). \quad (7.2)$$

Étant donné le fait que le système a une impulsion k_0 et que $\mathcal{P}_{12}(t)$ oscille *a priori* au cours du temps, la quantité $I(x)$ oscille spatialement avec une période spatiale : $\Lambda = \hbar k_0 / (m\Omega)$. Cependant, une analyse rigoureuse nous montre que, du fait que les atomes sont en mouvement, dans certaines conditions ces oscillations peuvent disparaître.

7.1.2 Suppression des oscillations de Rabi

Dans un premier temps, nous raisonnons avec une onde plane d'impulsion k_0 arrivant sur la zone laser [59]. Dans la zone laser, les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ ne sont plus des états propres. En diagonalisant la matrice de couplage nous obtenons deux valeurs propres et vecteurs propres associés :

$$\lambda_{\pm} = \mp \Omega/2; \quad |\lambda_{\pm}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

dans la base $|1\rangle, |2\rangle$. Nous cherchons les vecteurs propres dans la zone laser $\Psi_{k_0}^{laser}$, associés à la valeur propre $E_{k_0} = \hbar^2 k_0^2 / 2m$, sous la forme $\Psi_{k_0}^{laser} = C_+ |\lambda_+\rangle e^{ik_+ x} + C_- |\lambda_-\rangle e^{ik_- x}$. De l'équation aux valeurs propres $H \Psi_{k_0}^{laser} = E_{k_0} \Psi_{k_0}^{laser}$, on en déduit les vecteurs d'onde propres :

$$k_{\pm}^2 = k_0^2 \pm \frac{m}{\hbar} \Omega. \quad (7.4)$$

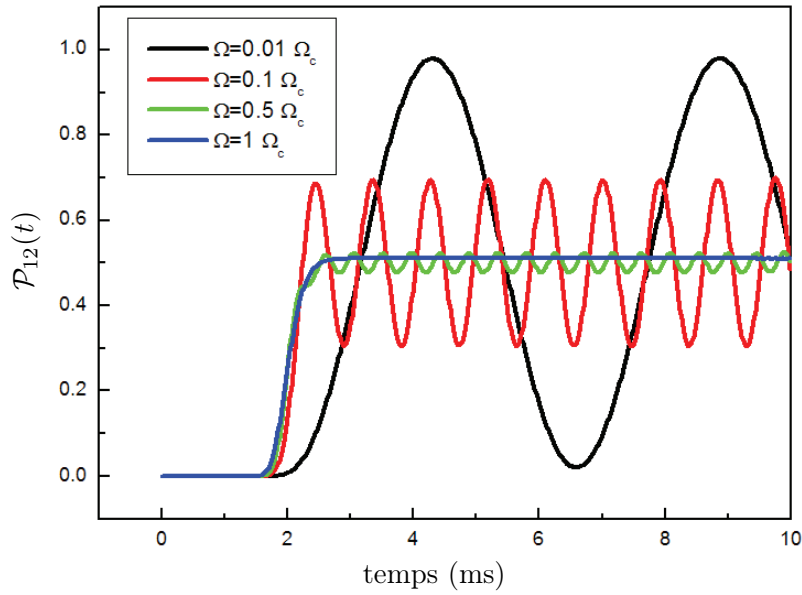


FIGURE 7.2 – **Suppression des oscillations de Rabi temporelles.** Probabilité \mathcal{P}_{12} en fonction du temps pour un paquet d'onde entrant dans la zone laser. L'amplitude des oscillations diminue lorsque la constante de couplage augmente, jusqu'à disparaître pour Ω_c . L'état initial est un paquet d'onde gaussien limité, de dispersion en vitesse $\Delta v = 1.0 \text{ mm.s}^{-1}$, vitesse $v_0 = 10.0 \text{ mm.s}^{-1}$, placé à $20 \text{ }\mu\text{m}$ de la zone laser. Les atomes sont initialement dans l'état $|1\rangle$. Pour ces paramètres $\Omega_c = 22 \text{ kHz}$.

Nous allons faire une étude à vitesse incidente $\hbar k_0/m$ constante, et nous allons répertorier différents régimes selon la constante de couplage Ω . Il existe une valeur Ω_c qui définit un seuil au dessous duquel k_-^2 est négatif :

$$\Omega_c = \frac{\hbar k_0^2}{m}, \quad (7.5)$$

l'onde $|\lambda_- \rangle$ est alors évanescence. Par conséquent, le système est dans l'état propre $|\lambda_+ \rangle$. Les probabilités d'être dans l'état $|1\rangle$ ou $|2\rangle$ n'évoluent pas. Il y a *suppression des d'oscillations de Rabi*, voir figure (7.2).

Cet effet de suppression des oscillations de Rabi, est dû au fait qu'un des états propres dans la zone d'interaction est évanescence. Cette suppression est à distinguer des cas où les oscillations de Rabi existent mais sont masquées par d'autres effets que nous allons décrire par la suite.

7.2 Condition d'observation de la suppression des oscillations de Rabi

Pour observer cette suppression des oscillations de Rabi, le paquet d'onde disponible sur l'expérience est un condensat, il est envoyé sur une zone illuminée par un laser. Nous verrons qu'il est nécessaire d'observer les atomes après un temps de vol. Trois paramètres

(l'intensité du couplage Ω , la dispersion du paquet d'onde en impulsion δ_k et τ le temps de vol) déterminent l'expérience.

7.2.1 Observation de la suppression de la composante $|\lambda_- \rangle$

L'effet principal de *suppression des d'oscillations de Rabi* est l'extinction de l'amplitude de l'état propre $|\lambda_- \rangle$ lorsque la constante de couplage Ω est supérieure à sa valeur critique. Ces deux composantes ont deux vitesses différentes (7.4), par conséquent, une étude dynamique de l'ensemble de la densité atomique (indépendamment de l'état $|1 \rangle$ ou $|2 \rangle$) permet de distinguer ces deux composantes. La figure (7.3) représente la dynamique d'un paquet d'onde pour quatre constantes de couplages différentes. Dans le premier cas (a), les deux paquets ne sont pas très bien résolus du fait de leurs vitesses assez proches. Sur le cas (b), les deux paquets sont bien résolus ; lorsque la constante de couplage atteint la valeur critique, la composante $|\lambda_- \rangle$ est d'abord bien atténuée (c), sur cet exemple la largeur en vitesse est telle que certaines composantes de vitesse permettent l'existence de $|\lambda_- \rangle$. Pour une constante de couplage plus élevée (d), $|\lambda_- \rangle$ a disparue. Nous voyons sur cet exemple, qu'il serait plus judicieux dans le cas d'un paquet d'onde ayant une dispersion de vitesse, de calculer la constante de couplage critique pour la vitesse maximum du paquet d'onde et non sa vitesse moyenne.

7.2.2 Contraintes imposées par le paquet d'onde

L'objectif de cette partie est de répertorier les effets, autres que la *suppression de la composante* $|\lambda_- \rangle$ qui sont susceptibles de détruire les oscillations. Cette étude est importante pour évaluer la faisabilité de l'expérience.

Suppression de la composante $|\lambda_- \rangle$ en fonction de la dispersion de vitesse du paquet d'onde

La suppression de la composante $|\lambda_- \rangle$ dépend de la vitesse incidente. Dans le cas d'un paquet d'onde, chaque classe de vitesse a sa propre constante de couplage critique. Sur la figure (7.4), nous représentons un exemple de mesure de $|\lambda_- \rangle$ en fonction de la constante de couplage pour différentes dispersions des vitesses du paquet d'onde initial. L'extinction de l'amplitude de $|\lambda_- \rangle$ a bien lieu pour Ω_c . La transition entre les deux régimes est d'autant plus nette que la dispersion de vitesse Δv est faible. La taille relative du régime transitoire s'écrit :

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega_c} = \frac{2\Delta v}{v}, \quad (7.6)$$

où v est la vitesse du paquet d'onde.

Brouillage des oscillations spatiales dû à la dispersion de vitesse

Pour un paquet d'onde de vitesse moyenne v_0 dans la zone de couplage, la période des oscillations de Rabi spatiales est $\Lambda = 2\pi v_0 / \Omega$. Le paquet d'onde atomique a une dispersion

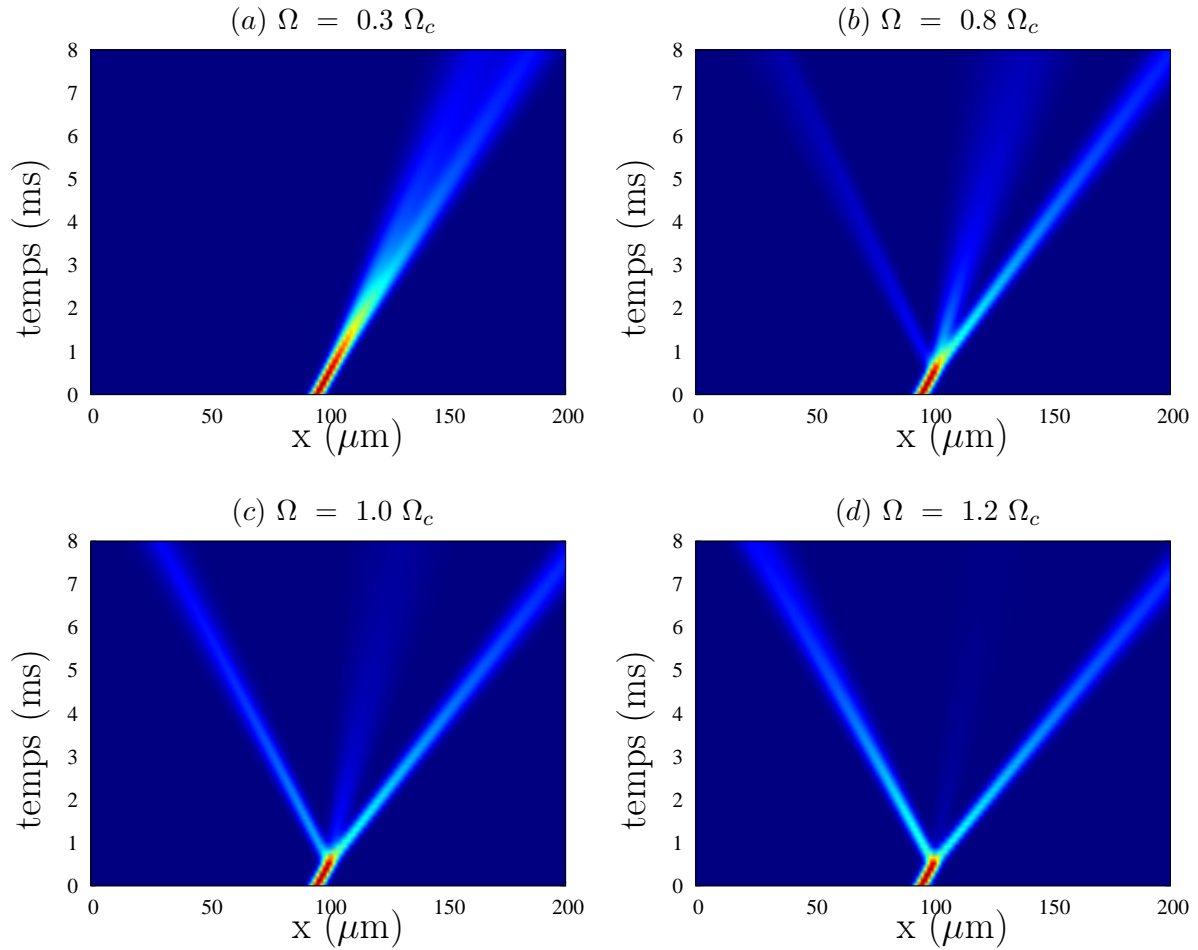


FIGURE 7.3 – **Suppression de la composante $|\lambda_- \rangle$.** *Dynamique de la densité de présence en fonction du temps pour un paquet d'onde, pour différentes constantes de couplage dans la zone laser. L'état initial est un paquet d'onde gaussien limité de dispersion de vitesse $\Delta v = 1.0 \text{ mm.s}^{-1}$, vitesse $v_0 = 10.0 \text{ mm.s}^{-1}$, placé à $10 \text{ } \mu\text{m}$ de la zone laser ($x = 100 \text{ } \mu\text{m}$). Les atomes sont initialement dans l'état $|1 \rangle$. Pour ces paramètres $\Omega_c = 22 \text{ kHz}$. (a) $\Omega = 6.6 \text{ kHz}$, (b) $\Omega = 17.6 \text{ kHz}$, (c) $\Omega = 22 \text{ kHz}$, (d) $\Omega = 26.4 \text{ kHz}$.*

de vitesse Δv , chaque classe de vitesse va avoir ses propres oscillations spatiales. Le nombre d'oscillations résolues est de l'ordre de $v_0/2\Delta v$, la longueur caractéristique de brouillage des oscillations est de l'ordre de $\pi v_0^2/\Omega\Delta v$.

Diminution du contraste des oscillations temporelles dû à la dispersion de position

La dispersion de position du paquet d'onde atomique incident peut également contribuer à diminuer le contraste des oscillations de Rabi temporelles. En effet, du fait de sa dispersion, le paquet d'onde n'entre pas instantanément dans la zone laser et par conséquent, les différentes parties de la fonction d'onde ne vont pas osciller en phase. Le critère qui permet de déterminer s'il y a atténuation du contraste des oscillations temporelles, est le rapport η entre le temps d'entrée du paquet d'onde (de largeur approximative $2\Delta x_0$)

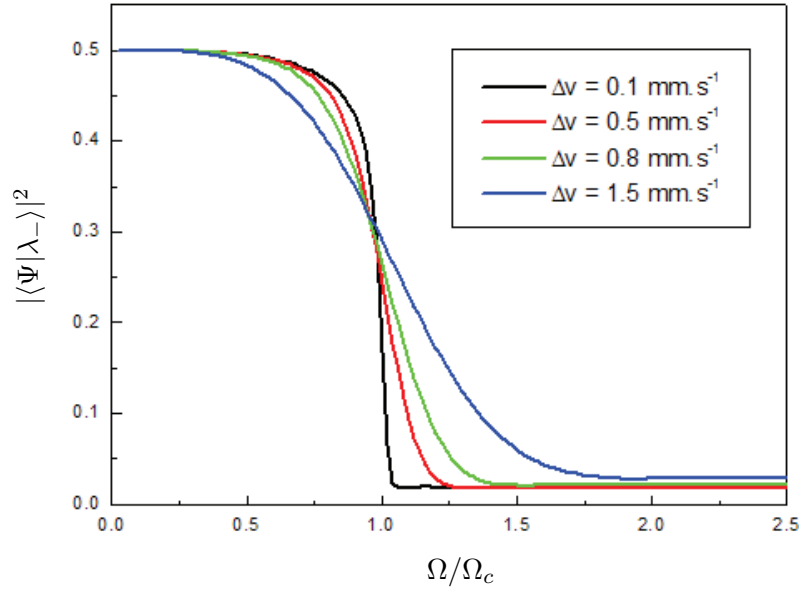


FIGURE 7.4 – *Projection du paquet d’onde sur l’état propre $|\lambda_{-}\rangle$ en fonction de la constante de couplage pour différentes dispersions de vitesse du paquet d’onde. Le paquet d’onde est, hormis la dispersion en vitesse, identique à celui des simulations de la figure (7.2). La suppression de la composante $|\lambda_{-}\rangle$ est d’autant plus nette que la dispersion en vitesse est faible.*

dans la zone d’interaction et la période des oscillation :

$$\eta = \frac{4\pi\Delta x_0}{\Omega v_0}. \quad (7.7)$$

Plus ce rapport est grand, plus le contraste des oscillations temporelle est petit. La figure (7.6 (a)) représente un exemple de diminution du contraste pour différents η . Ce scénario, où chaque atome a la même histoire lorsqu’il rentre dans la zone laser, à une date différente, n’affecte pas les oscillations spatiales comme on le voit sur la partie (b) de la figure où les oscillations spatiales sont identiques à la précision du trait.

7.2.3 Contraintes imposées par la résolution optique

Dans cette partie, nous répertorions les contraintes imposées par la résolution optique qui est dans le meilleur des cas sur le dispositif actuel de l’ordre de $\delta_x \approx 5 \mu m$.

Bord non net de la zone laser

La fonction de Heaviside de l’hamiltonien (7.1) considère le bord de la zone laser comme net. Cependant, il est réalisé expérimentalement par l’image d’un objet type lame de rasoir et par conséquent la zone de transition a une taille finie d’au mieux $\delta_x \approx 5 \mu m$ du fait de la résolution optique finie (voir figure (7.7 (a))). La partie (b) de la figure (7.7) représente la projection du paquet d’onde sur sur l’état propre $|\lambda_{-}\rangle$ en fonction de la constante de

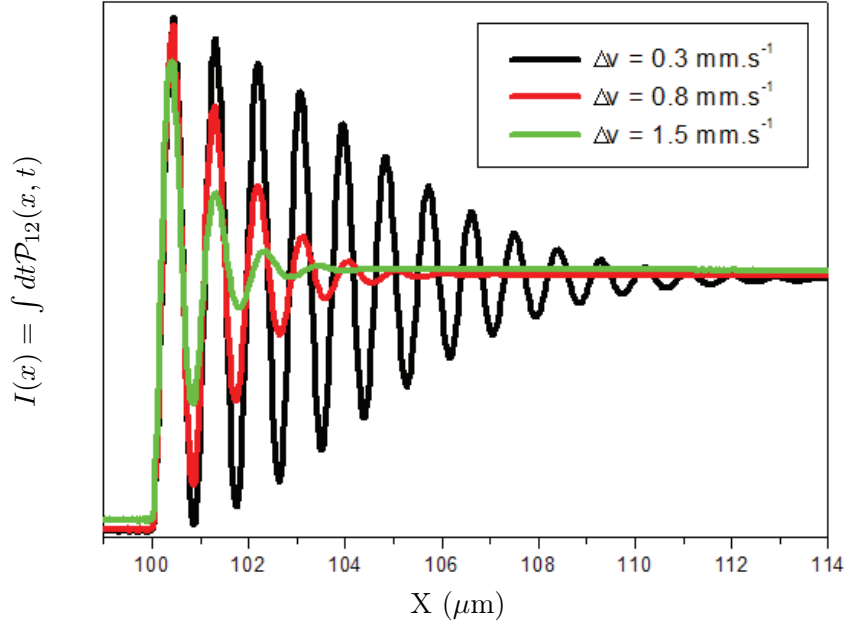


FIGURE 7.5 – **Brouillage des oscillations spatiales de Rabi.** *Intégrale temporelle de la probabilité \mathcal{P}_{12} en fonction de la coordonnée x , voir formule (7.2), pour différentes dispersion de vitesse du paquet d'onde. Le paquet d'onde est, hormis la dispersion en vitesse, identique à celui des simulations de la figure (7.2). La constante de couplage est de $0.5 \Omega_c$. A vitesse incidente donnée, plus la dispersion en vitesse est élevée, moins les oscillations sont visibles.*

couplage pour différents δx . L'effet principal de la zone de transition, sur ces courbes, est de modifier la constante de couplage. Pour comprendre ce phénomène, nous allons nous placer dans l'espace des vitesses. La figure (7.8) représente le module carré de la transformée de Fourier dans les cas $\delta x = 0$ et $10 \mu\text{m}$ en fonction du temps pour $\Omega = \Omega_c$. Initialement, le paquet est à la vitesse v_0 . Dans le premier cas, dès que le paquet entre dans la zone de couplage, (sur cet exemple à $t = 2 \text{ ms}$), la composante $|\lambda_- \rangle$ est évanescence et seule la composante $|\lambda_+ \rangle$ se propage à une vitesse d'environ 15 mm.s^{-1} . Dans le second cas, le paquet voit une constante de couplage plus faible et l'état propre $|\lambda_- \rangle$ n'est pas évanescence. Le paquet se propage avec une vitesse de plus en plus faible, voir formule (7.4). Les atomes sont presque immobilisés avant d'atteindre la zone où $|\lambda_- \rangle$ est évanescence. Le critère qui détermine si le bord est net, est le nombre d'oscillation de Rabi que le paquet a le temps de réaliser sur la distance δx :

$$\frac{\delta x \Omega}{2\pi v_0}. \quad (7.8)$$

Sur l'exemple (7.7), pour onze oscillations ($\delta x = 5 \mu\text{m}$), ce phénomène est visible.

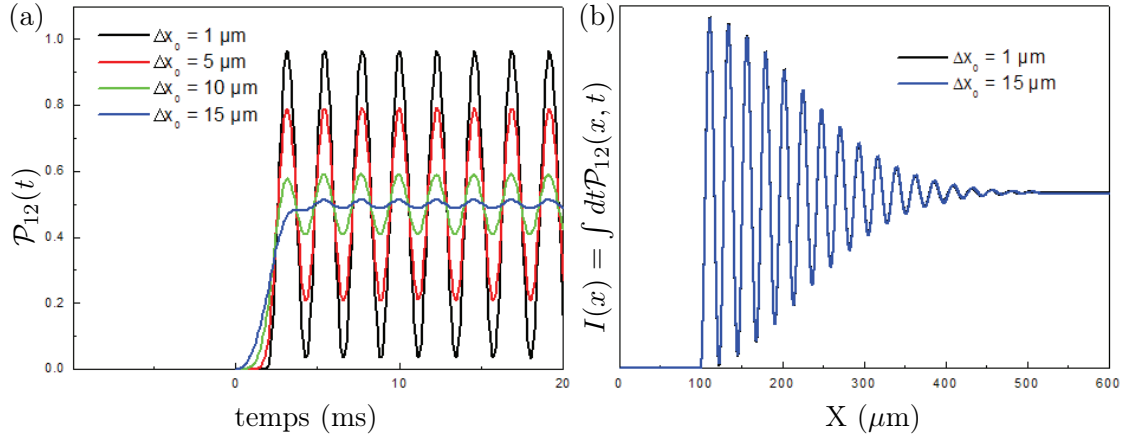


FIGURE 7.6 – **Diminution du contraste des oscillations temporelles de Rabi.** (a) Oscillations de Rabi temporelles, pour différentes dispersion de position du paquet d’onde. La dispersion de vitesse $\Delta v = 0.3 \text{ mm.s}^{-1}$, la vitesse $v_0 = 10.0 \text{ mm.s}^{-1}$ sont identiques pour tous les paquets d’onde. La constante de couplage est de $0.02 \Omega_c$. Les atomes sont initialement dans l’état $|1\rangle$. En noir $\eta = 0.3$, en rouge 1.6, en vert 3.2 et en bleu 4.8. (b) Intégrale temporelle de la probabilité \mathcal{P}_{12} en fonction de x , voir formule (7.2) pour les deux cas extrêmes de la figures précédentes. Le brouillage, par la dispersion de position du paquet d’onde incident, des oscillations de Rabi temporelles, n’affectent pas les oscillations de Rabi spatiales.

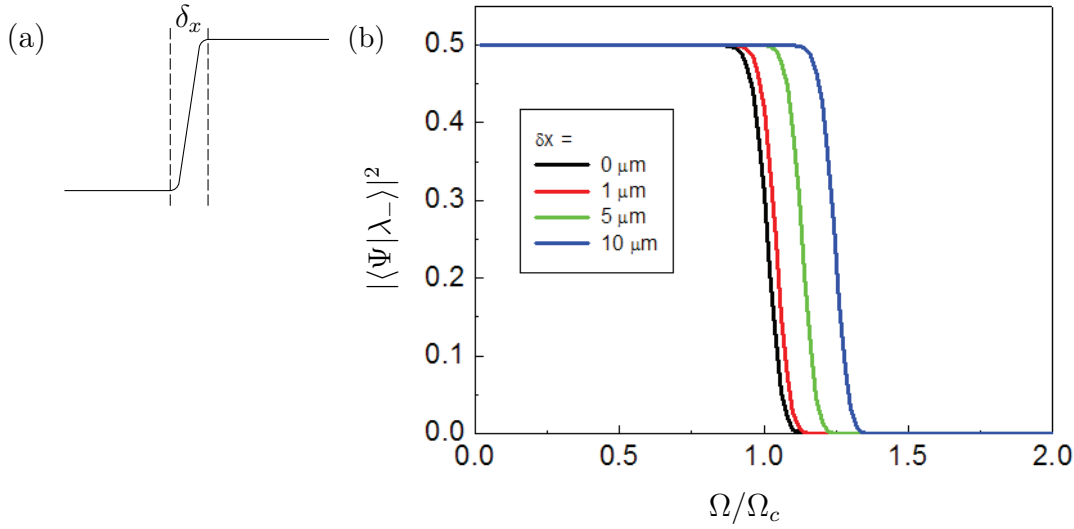


FIGURE 7.7 – (a) Définition du bord non net de la zone laser. (b) Projection du paquet d’onde sur l’état propre $|\lambda_{-}\rangle$ en fonction de la constante de couplage pour différents δx . L’état initial est paquet d’onde gaussien limité de dispersion de vitesse $\Delta v = 0.2 \text{ mm.s}^{-1}$, vitesse $v_0 = 10.0 \text{ mm.s}^{-1}$, placé à $20 \mu\text{m}$ de la zone laser. Les atomes sont initialement dans l’état $|1\rangle$. La constante de couplage est égale à la valeur critique $\Omega = \Omega_c = 22 \text{ kHz}$.

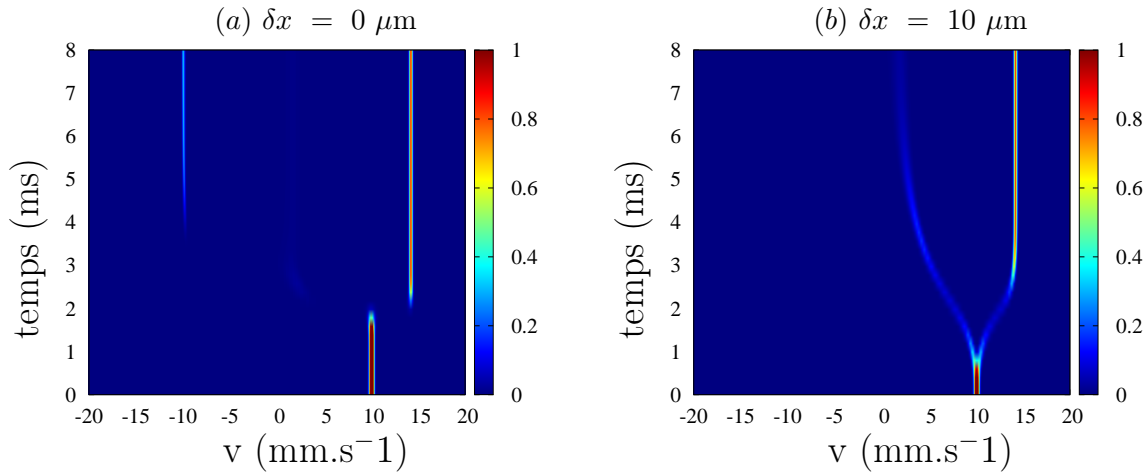


FIGURE 7.8 – *Dynamique de la densité de probabilité de présence en fonction du temps dans l'espace des vitesses pour un paquet d'onde, pour (a) $\delta x = 0 \mu m$ et (b) $\delta x = 10 \mu m$. Les paquets d'onde et les conditions sont exactement identiques à la figure (7.7).*

Résolution des oscillations spatiales

Pour une expérience où l'on souhaite observer la suppression des oscillations de Rabi *in situ*, il est nécessaire que la période spatiale soit supérieure à la résolution optique ce qui implique, pour un paquet d'onde de vitesse moyenne v_0 , une borne maximum pour la constante de couplage :

$$\Lambda > \delta_x \Leftrightarrow \Omega < 2\pi v_0 / \delta_x. \quad (7.9)$$

Cette borne de constante de couplage maximum, à vitesse donnée, (droite rouge sur la figure (7.9) doit être inférieure à la valeur critique de la constante de couplage (droite noire). Cette condition est vérifiée pour des vitesses inférieures à 1 mm.s^{-1} , ce qui est difficile à maîtriser expérimentalement.

Il nous est impossible d'être sensible à la suppression des oscillations de Rabi spatiales *in situ*, par conséquent nous allons tenter de les observer après un temps de vol.

7.2.4 Détection des oscillations de Rabi spatiales après un temps de vol

Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode pour observer la suppression des oscillations de Rabi qui, par rapport à la méthode proposée par [59], permet de s'affranchir des contraintes imposées par la résolution optique et la dispersion de vitesse. Nous regardons la densité de présence dans l'état $|2\rangle$ en fonction du temps, après un temps de vol. La dilatation du paquet d'onde atomique, permet la dilatation des oscillations qui ont alors une taille discernable expérimentalement par une imagerie standard. Par rapport au graphe (7.5), nous n'observons non plus l'intégrale sur le temps, mais la densité de présence à un instant donné. La figure (7.10) représente un exemple de simulations avec des paramètres réalisables expérimentaux [31], dans ces conditions, nous sommes sensibles à la

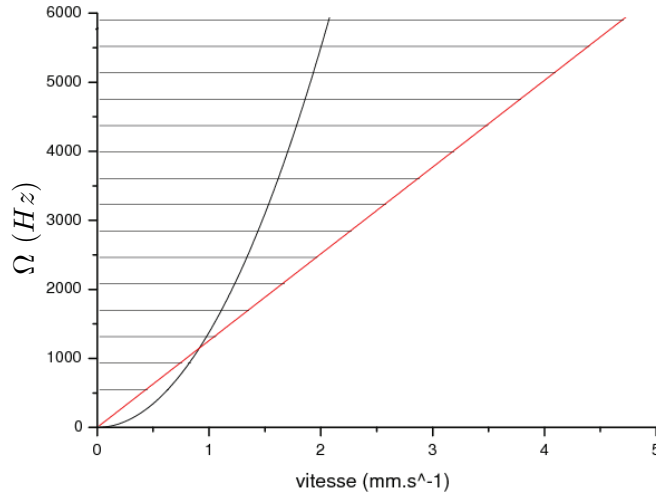


FIGURE 7.9 – Zone hachurée au dessus de droite rouge : pulsation de Rabi, où la résolution spatiale des oscillations est impossible sur notre dispositif. Pulsation critique (courbe noire). Au dessus, il y a suppression des oscillations de Rabi. La résolution optique limitée, nous impose une vitesse inférieure à 1 mm.s^{-1} .

suppressions des oscillations. Sur la figure (a), les oscillations sont bien visibles. Les minima et maxima se décalent au cours du temps c'est ce qui entraîne le brouillage des oscillations spatiales (7.5). Dans le cas (b), les oscillations auraient un pas spatial de l'ordre de $15 \mu\text{m}$, observable avec notre dispositif.

7.3 Choix de la transition : Faisceaux Raman pour la transition

Dans ce paragraphe, nous étudions le choix de la transition atomique. Nous souhaitons exciter à résonance une transition entre niveaux du fondamental du ^{87}Rb de manière locale sur une échelle spatiale de l'ordre de la dizaine de μm . Cependant, le phénomène de diffraction ne permet pas de focaliser sur quelques micromètres une onde radio. D'où l'idée d'utiliser une transition à deux photons d'énergie $\hbar\omega_1$ et $\hbar\omega_2$ telle que $\delta_0 = \omega_1 - \omega_2$ et que ω_1 et ω_2 soient dans le visible, voir schéma (7.11). Nous voyons tout de suite que la précision porte plus sur la différence entre les deux fréquences optiques, que sur leur valeur intrinsèque. De plus, on montre que les deux faisceaux doivent avoir une cohérence de phase pour exciter la transition Raman. Nous considérons deux transitions atomiques possibles :

- (i) entre deux niveaux Zeeman du même niveau hyperfin $5^2S_{1/2}$, $F = 1$. Dans cette situation $\delta_0 = \mu_B B / 2\hbar$. En prenant, un champ magnétique de 10 G, nous obtenons $\delta_0 = 7 \text{ MHz}$.
- (ii) entre les deux niveaux hyperfins du fondamental $F = 1$ et $F = 2$, dans ce cas : $\delta_0 = 6.8 \text{ GHz}$.

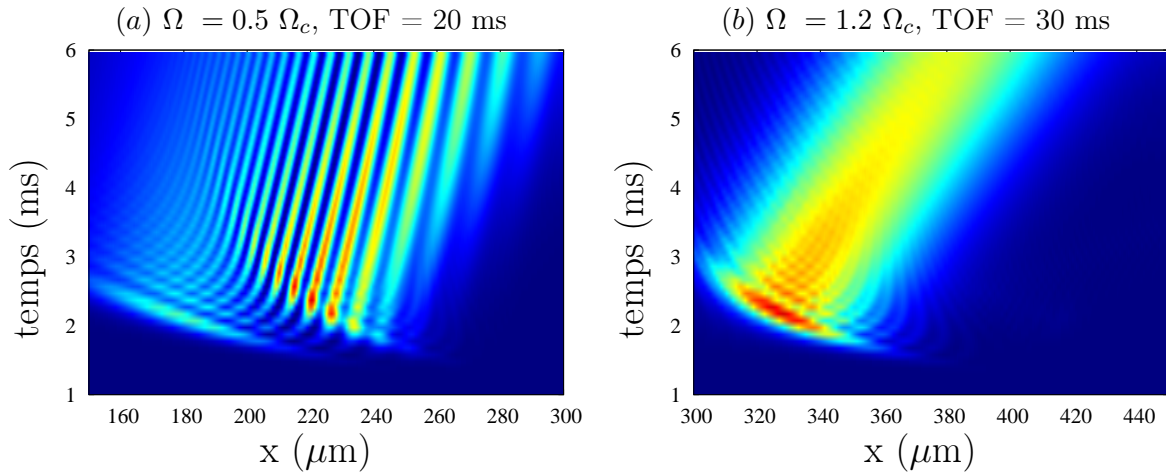


FIGURE 7.10 – Dynamique de la densité de présence dans l'état $|2\rangle$ en fonction du temps dans l'espace réel pour un paquet d'onde. L'état initial est paquet d'onde gaussien de dispersion de vitesse $\Delta v = 1.7 \text{ mm.s}^{-1}$, vitesse $v_0 = 10.0 \text{ mm.s}^{-1}$, placé à $20 \mu\text{m}$ de la zone laser. Les atomes sont initialement dans l'état $|1\rangle$. Les images sont prises après un "temps de vol" pendant lequel le champ électromagnétique de couplage est éteint. Le temps de vol permet de dilater les oscillations.

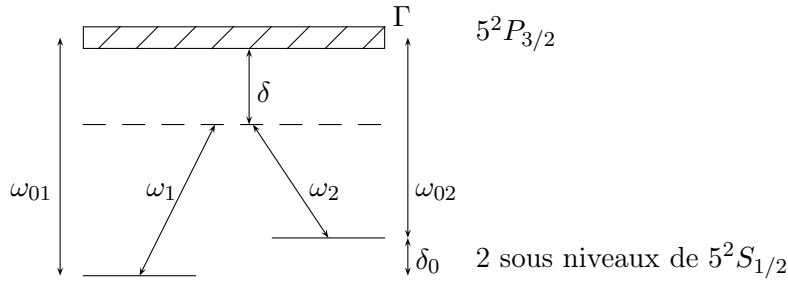


FIGURE 7.11 – Définition des fréquences Raman

Applications numériques

Nous calculons l'intensité lumineuse nécessaire pour obtenir une fréquence de Rabi donnée, $\Omega = 2\pi \times 60 \text{ kHz}$. Nous nous plaçons à $\delta = 2\pi \times 6 \text{ GHz}$ de la transition vers $5^2P_{3/2}$. Ainsi, nous sommes dans le cadre de la resonance Raman $\delta_0 = |\omega_1 - \omega_2| = |\omega_{01} - \omega_{02}|$, mais largement hors resonance à 1 photon : $\delta = |\omega_{01} - \omega_1| = |\omega_{02} - \omega_2| \ll \Gamma$. Soient I_1 et I_2 les intensités des faisceaux 1 et 2 telles que $I_1 = I_2 = I_0/2$ où I_0 est l'intensité totale disponible. La pulsation de Rabi des faisceaux Raman [60] s'écrit :

$$\Omega = \frac{|\Omega_1||\Omega_2|}{4\delta}, \quad (7.10)$$

où $|\Omega_1|$ et $|\Omega_2|$ sont les fréquences de Rabi des transitions à 1 photon : $|\Omega_i|^2 = \frac{\Gamma^2}{2} I_i / I_S$ avec I_S l'intensité de saturation. On obtient ainsi :

$$\Omega = \frac{\Gamma^2}{4\delta} \frac{I_0}{I_S}. \quad (7.11)$$

Pour le ^{87}Rb , $I_S = 1.6 \text{ mW/cm}^2$ et $\Gamma = 2\pi \times 6 \text{ MHz}$, Nous obtenons ainsi $I_0 \approx 64 \text{ mW/cm}^2$. Le taux de diffusion s'écrit :

$$\gamma_d = \frac{1}{2} \frac{\Gamma s}{1 + s},$$

où le paramètre de saturation :

$$s = \frac{I_0}{2I_S} \frac{1}{\frac{1+4\delta^2}{\Gamma^2}}.$$

L'inverse du taux de diffusion γ_d^{-1} , dans notre cas 30 secondes, doit être grand devant le temps moyen de l'expérience.

7.4 Conclusion

Nous avons présenté les conditions pour observer la suppression des oscillations de Rabi pour des atomes en mouvement. Les principales hypothèses sont : le caractère semi-infini de la zone de champ électromagnétique, le fait qu'on ait négligé l'émission spontanée et le fait de considérer seulement deux niveaux électroniques de l'atome. Avec notre dispositif expérimental actuel, il n'est pas possible d'observer *in situ* la suppression des oscillations de Rabi spatiales. Cependant, les oscillations spatiales de la densité atomique dans l'état $|2\rangle$ sont expérimentalement accessibles après un temps de vol qui dilate le paquet atomique.

La suppression de la composante $|\lambda_- \rangle$ permet de préparer le système dans un état interne pur spécifique $|\lambda_+ \rangle$. Cette observation est accessible expérimentalement *in situ*, étant donné que les composantes n'ont pas la même vitesse et donc se séparent spatialement. La corrélation entre les degrés de liberté externes et internes permet la purification d'un état au fil de sa propagation. Ces processus de purifications sont fondamentaux [61] en informatique quantique. Tout naturellement, il est possible que les atomes restent au repos et que ce soit le laser qui balaye les atomes.

Il existe un analogue optique de ce système [62]. Les deux polarisations orthogonales correspondent dans l'analogie optique au système à deux niveaux, et les oscillations de Rabi aux oscillations de polarisation dans un milieu optiquement actif.

Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons présenté une partie des travaux de recherche effectués pendant ma thèse sur la production, la diffusion et la manipulation d’ondes de matière. Nous avons proposé différentes études et systèmes pour illustrer cette thématique. Les différents types de chapitre reflètent la diversité des approches effectuées au cours de ma thèse. Certains chapitres sont en lien direct avec l’expérience : chapitres 3, 4. D’autres sont des études de faisabilité expérimentale où nous avons proposé des observables pertinentes des phénomènes en jeu : chapitres 2, 5, 6 et 7.

La dispersion de vitesse de l’onde de matière est un paramètre fondamental lors de l’interaction avec un potentiel. Nous avons montré dans les deux premiers chapitres que la dispersion de vitesse est principalement contrôlée par les interactions et la dynamique du potentiel de piégeage. Dans une expérience de diffusion, lors du découplage des atomes hors du potentiel, nous avons distingué deux phases : l’ouverture du potentiel et le départ des atomes. Lors de l’étude de l’ouverture, nous avons proposé une formule analytique qui donne la dynamique de la dispersion de vitesse d’un condensat en présence d’interactions dans un potentiel harmonique dépendant du temps en dimension un et deux. Nous avons décrit en détail le processus de départ des atomes et exposé les effets notamment en terme de dispersion de vitesse du paquet atomique.

L’expérience la plus simple de diffusion pour exalter le comportement quantique est la diffusion d’une onde de matière sur un réseau optique. Dans le chapitre (3) après un rappel du comportement d’une fonction d’onde dans un potentiel périodique, nous avons montré comment il est possible de sonder la structure de bande d’un réseau optique avec une expérience de diffusion. Dans les chapitres 4 et 5 nous avons exposé des outils pour manipuler la réflexion de la fonction d’onde sur un réseau : la dépendance temporelle et un couplage avec le confinement transverse.

Le chapitre 6 présente un système où la dispersion de vitesse *globale* et instantanée du paquet atomique n’est pas le paramètre pertinent lors de l’interaction avec un potentiel localisé. Nous avons introduit une définition *locale* de la dispersion de vitesse qui se révèle être le paramètre qui contrôle in fine la réflexion dans notre système.

Le chapitre 7 démontre la faisabilité expérimentale, d’une proposition du groupe de Bilbao [59] de la diffusion d’atomes à deux niveaux entrant dans une zone où règne un champ électromagnétique résonnant avec la transition atomique. La corrélation entre les degrés de liberté externes et internes permet la purification d’un état au fil de sa propagation.

Les travaux exploratoires de ma thèse vont se poursuivre avec l'étude de la diffusion d'une onde de matière sur un réseau bichromatique ou encore avec l'étude d'une cavité de Bragg faite de deux miroirs de Bragg.

Annexe A

Simulation d'ensemble de particules classiques

Nous présentons dans cette appendice, différents outils numériques pour simuler l'évolution d'un ensemble de particules classiques dans un potentiel donné. Nous présenterons l'échantillonnage de l'état initial un algorithme d'évolution symplectique, c'est-à-dire qui conserve le volume dans l'espace des phases.

A.1 Échantillonnage de l'état initial selon une loi de probabilité

A.1.1 Méthode de réjection

Cette méthode permet d'échantillonner les positions et vitesses initiales, selon une loi de distribution donnée $g_0(x, \Delta x_0)$ de manière indirecte en passant par une densité de probabilité $h(x)$. On considère, raisonnablement, que la distribution est nulle en-dehors de l'intervalle $[-8\Delta x_0, 8\Delta x_0]$. L'algorithme se décompose de la manière suivante [63] :

- tirer u uniformément entre 0 et $\sqrt{\frac{1}{2\pi\Delta x_0^2}}$ le maximum de g_0 .
- tirer x uniformément dans l'intervalle $[-8\Delta x_0, 8\Delta x_0]$
- si $u < g_0(x, \Delta x_0)$, x est conservé comme position initiale

A.1.2 Méthode Box-Muller

Cette méthode permet d'échantillonner une distribution gaussienne $g_0(x, \Delta x_0)$ [63] à partir du tirage de x_1 et x_2 selon une probabilité uniforme sur $[0, 1]$.

$$y = \Delta x_0 \sqrt{-2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2).$$

A.1.3 Test de la qualité du tirage gaussien

Pour une loi gaussienne d'écart-type δ_x , les rapports des moments obéissent à la loi :

$$\frac{\langle x^{2p+2} \rangle}{\langle x^{2p} \rangle} = (2p + 1)\delta_x^2 \quad (\text{A.1})$$

Nous testons la qualité du tirage selon une loi gaussienne normale ($\sigma = 1$) en calculant ces rapports des premiers moments. Les résultats sont reportés sur la figure (A.1). Pour un nombre de tirages supérieur 500000, la qualité de l'échantillonnage de la méthode de réjection est suffisante pour les calculs de dispersion de vitesse classiques.

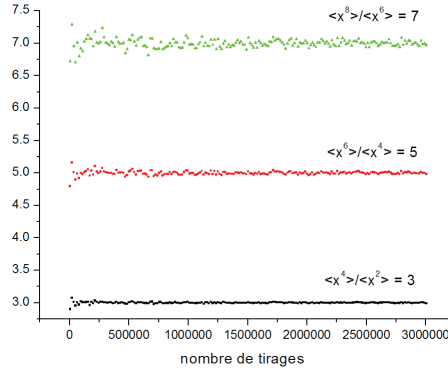


FIGURE A.1 – *Premiers rapports des moments tirés selon une loi normale par la méthode de réjection.*

A.2 Algorithme d'évolution : méthode symplectique d'ordre 4

Les équations différentielles du mouvement de Newton sont intégrées par une méthode symplectique d'ordre 4 [64]. Les algorithmes d'évolution symplectique, qui conservent l'aire dans l'espace des phases au cours du calcul sont utilisés en mécanique céleste et dans les problèmes de chaos. Pour décrire l'algorithme, on sépare les termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de l'hamiltonien :

$$H = T(p) + V(x, t). \quad (\text{A.2})$$

L'algorithme nous permet de calculer $(x(t + dt), p(t + dt))$ en fonction de $(x(t), p(t))$ en quatre étapes identiques schématisées sur le diagramme de la figure (B.2), où les coefficients (c_i, d_i) sont donnés dans la table de la figure.

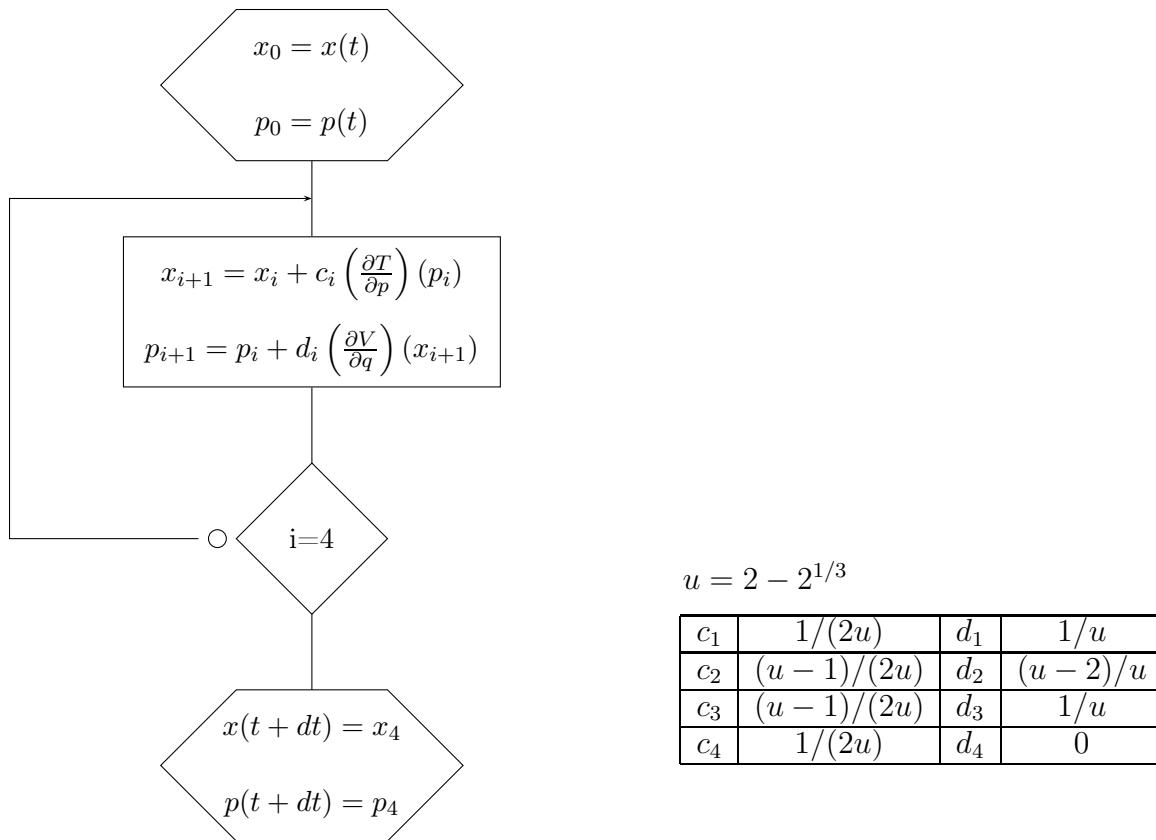


FIGURE A.2 – Schéma de l'algorithme symplectique d'ordre 4, les coefficients (c_i, d_i) sont donnés dans la table précédente

Annexe B

Diffusion d'onde plane sur un potentiel localisé

Dans cette appendice, on décrit une méthode qui donne les coefficients en amplitude de transmission t et de réflexion r du problème de diffusion à une dimension d'une onde plane sur un potentiel donné V d'extension finie. Cette méthode permet d'étudier toutes les variations possibles du potentiel réseau : effet de la taille du réseau, de l'enveloppe gaussienne ou de l'ajout d'une éventuelle pente au faisceau de guidage. Cependant elle ne permet que l'étude d'onde plane et ne permet pas d'étudier la réflexion de paquets d'onde possédant une largeur dans l'espace des impulsions ou bien les effets des interactions ou encore la diffusion sur des potentiels dépendant du temps.

La résolution de l'équation de Schrödinger d'une onde plane de vecteur d'onde k_0 et par conséquent d'énergie $E = \hbar^2 k_0^2 / 2m$ qui aborde le réseau revient à une équation différentielle du second ordre avec des conditions aux limites :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi = E \Psi. \quad (\text{B.1})$$

La méthode numérique consiste à discrétiser la fonction d'onde Ψ sur une grille de taille L plus grande que la portée du potentiel. Soient n , le nombre de points, $dx = L/(n-1)$, le pas spatial et φ_j la valeur de la fonction d'onde au point $x_j = j * dx$. L'équation (B.1) s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi_j - 2\varphi_{j+1} + \varphi_{j+2}}{dx^2} + V(x_{j+1}) \varphi_{j+1} = E \varphi_{j+1}. \quad (\text{B.2})$$

Mis à part le coefficient de réflexion en amplitude t la fonction d'onde est connue après l'interaction avec le potentiel : $t e^{ik_0 x}$. La méthode de résolution consiste à considérer que la fonction d'onde avant le réseau est :

$$\frac{e^{ik_0 x} + r e^{-ik_0 x}}{t}, \quad (\text{B.3})$$

et que la fonction d'onde après le réseau est $e^{ik_0 x}$ (voir figure B.1). La valeur de la fonction d'onde est donc connue en x_{n-1} et x_n . L'équation (B.2) nous donne la loi de récurrence qui

nous permet de remonter aux valeurs de φ_1 , φ_2 et φ_3 et par conséquent aux coefficients de réflexion et transmission en amplitude r et t . La figure (B.2) résume le principe de cet algorithme. Un test important de fiabilité de la méthode consiste à vérifier que $r^2 + t^2 = 1$. On en déduit le coefficient de réflexion $R = r^2$. Dans le cas où la transmission est quasiment nulle, lors de l'application de la loi de récurrence, le module des φ_j divergent dans le potentiel. Il est donc nécessaire de placer un test de la valeur du module, qui bloque la récurrence lorsque le module de φ_j dépasse un certain seuil. On affecte alors la valeur 1 à r et 0 à t .

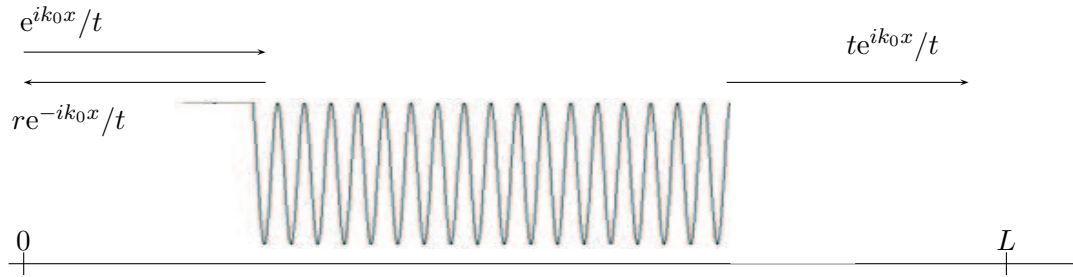


FIGURE B.1 – Réflexion et transmission d'une onde plane de vecteur d'onde k_0 par un potentiel d'extension finie.

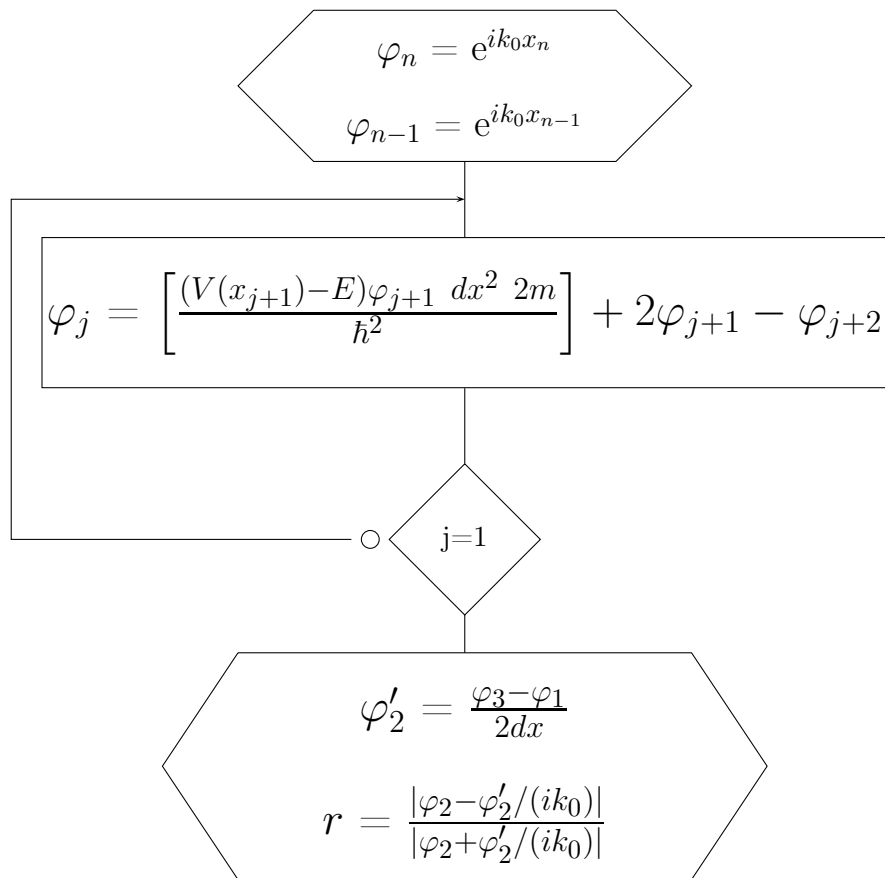


FIGURE B.2 – Schéma de l'algorithme de résolution de la diffusion d'une onde plane sur un potentiel $V(x)$.

Annexe C

Simulation de Schrödinger par une méthode spectrale

C.1 Algorithme Split Step Fourier

C.1.1 Evolution élémentaire

Cette méthode consiste à approximer l'opérateur d'évolution élémentaire, sur un temps Δt en un produit de trois termes. L'erreur commise sur les commutateurs négligés est du troisième ordre en dt [65]. L'évolution élémentaire d'un pas dt du paquet d'ondes dictée par l'hamiltonien $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$ s'écrit :

$$\Psi(\mathbf{r}, t + \Delta t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{dt}{2} \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right) \exp\left(-idtV(\mathbf{r})\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{dt}{2} \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right) \Psi(\mathbf{r}, t) + O[(dt)^3]. \quad (\text{C.1})$$

Les trois termes sont de norme un, ce qui assure de manière directe la conservation de la norme au cours du calcul. Le terme faisant intervenir $\hat{\mathbf{p}}^2$ est l'opérateur d'évolution dans l'espace libre pendant $\Delta t/2$. Le terme de potentiel est diagonal dans l'espace réel et par conséquent son application correspond à une simple multiplication. Le terme d'évolution libre est linéaire dans l'espace des vitesses. Numériquement, il est beaucoup plus facile de calculer une transformée de Fourier (il existe des sous-routines très performantes en temps de calcul), d'appliquer un facteur de phase et revenir dans l'espace réel via une transformée de Fourier inverse, que de calculer des dérivées secondes. La figure (C.1) présente un schéma de l'algorithme. Nous détaillons dans cette appendice, les algorithmes en dimension un et deux utilisant comme transformée de Fourier rapide : FFTW (*the Fastest Fourier Transform in the West* rien que ça!).

C.1.2 Possibilités offertes par cet algorithme

Cette méthode d'évolution de la fonction d'onde présente différents avantages :

- (i) la possibilité d'étudier des potentiels dépendant du temps. En effet, à chaque pas

de temps le potentiel peut être modifié.

- (ii) la possibilité d'inclure un terme non-linéaire d'interaction inter-atomique.
- (iii) la possibilité de calculer l'état fondamental d'un potentiel donné, en présence ou non d'interactions.
- (iv) la possibilité de calculer l'évolution de système qui présente un couplage entre degrés de liberté internes et externes.

C.2 En dimension un

C.2.1 Transformée de Fourier

Soient L , la taille de grille, n , le nombre de points, $dx = L/(n-1)$, le pas spatial et φ_j la valeur de la fonction d'onde au point $x_j = j * dx$. Le nombre de points n doit être une puissance de 2. La transformée de Fourier rapide nous donne la valeur de transformée de Fourier en n points ordonnés ainsi :

$$\tilde{\varphi}_p = \begin{cases} \tilde{\Psi}\left(\frac{(p-1)2\pi}{L}\right) & \text{pour } p = 1, n/2 \\ \tilde{\Psi}\left(\frac{(p-1-n)2\pi}{L}\right) & \text{pour } p = n/2 + 1, n \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

C.2.2 Facteur d'évolution libre

On en déduit le facteur de phase à appliquer sur la transformée de Fourier lors des deux étapes "d'évolution libre" :

$$\exp\left(-\frac{i\Delta t}{2} \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta t}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{(p-1)2\pi}{L}\right)^2\right) & \text{pour } p = 1, n/2 \\ \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta t}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{(p-1-n)2\pi}{L}\right)^2\right) & \text{pour } p = n/2 + 1, n \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Après la multiplication par le facteur d'évolution libre, on applique à la fonction d'onde une transformée de Fourier inverse. Il est ensuite nécessaire de renormaliser la fonction d'onde par un facteur n , du aux transformés de Fourier.

C.2.3 Préparation de l'état initial

L'état initial est construit dans l'espace réel. Dans le cas d'une densité de probabilité de présence initiale gaussienne de dispersion Δ_x , le paquet est alors limité par la transformée de Fourier et la dispersion en impulsion s'écrit : $\Delta_p = \hbar/(2\Delta_x)$. Pour donner une impulsion p_0 au paquet d'ondes, il est nécessaire de multiplier la fonction d'onde initiale par un terme de phase : $\exp(ip_0 x/\hbar)$.

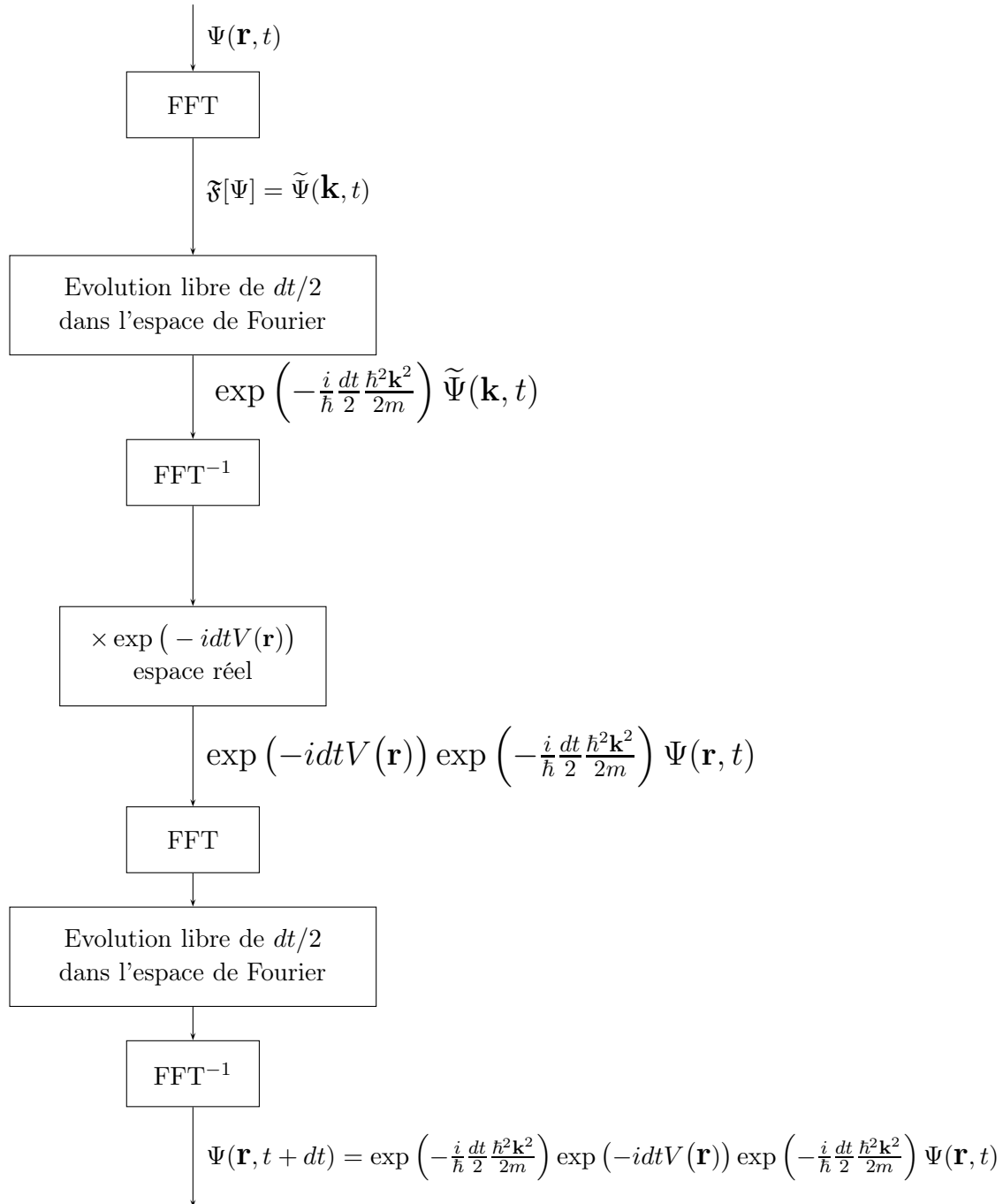


FIGURE C.1 – Schéma général de l'algorithme Split step Fourier de l'évolution élémentaire de la fonction d'onde pendant dt . L'algorithme se décompose en trois étapes : évolution dans l'espace libre pendant $dt/2$, application l'opérateur d'évolution de dt du terme de potentiel et à nouveau évolution dans l'espace libre pendant $dt/2$. L'opérateur d'évolution dans l'espace libre est appliqué dans l'espace réciproque où la dérivée seconde est remplacée par la multiplication par un terme de phase.

C.2.4 Contraintes numériques :

- (i) La taille de la grille doit être suffisamment grande pour contenir toute l'évolution de la fonction d'onde. Si la fenêtre est trop petite la fonction d'onde se retrouve après une étape "d'évolution libre" de l'autre côté de la grille.
- (ii) Le pas spatial : $dx = L/(n - 1)$, doit être suffisamment faible pour échantillonner correctement la fonction d'onde et le potentiel.
- (iii) Le pas dans l'espace de Fourier, imposé par la taille de la grille : $2\pi/L$ doit être suffisant pour échantillonner la transformée de Fourier de la fonction d'onde.
- (iv) La quantité de mouvement maximale est imposée par la taille de la grille et le nombre de points n : $\hbar n\pi/(L)$. Une fonction d'onde avec une quantité de mouvement supérieure à cette limite se retrouve après une étape "d'évolution libre" de l'autre côté du spectre.
- (v) Le critère prépondérant pour déterminer le pas de temps dt est l'échantillonnage du spectre énergétique [65] :

$$dt < \frac{\pi}{3\Delta V_{\text{Max}}} \quad (\text{C.4})$$

où V_{Max} est l'excursion maximum de l'énergie potentielle. De tous les critères à vérifier, c'est le plus empirique, et des phases de tests sont nécessaires pour tester la robustesse d'un résultat donné.

- (vi) Dans le cas de potentiels dépendant du temps, le pas de temps doit être suffisant pour échantillonner l'évolution du potentiel.
- (vii) En l'absence de potentiel et lorsque les interactions sont négligeables (lors d'un temps de vol par exemple), l'algorithme Split-Fourier est exact et le calcul est réalisé en un seul pas de temps égale à la durée totale.

C.2.5 Tests 1D

Cette phase est l'une des plus importantes lors de l'écriture d'un nouveau code. Le premier test à faire est la conservation de la norme au cours du calcul. Mesurer la précision avec laquelle la norme est conservée permet d'appréhender les barres d'erreurs sur les résultats obtenus par la suite, comme la réflexion sur un réseau par exemple. Les tests suivants concernent l'évolution libre, en l'absence de potentiel : étalement du paquet d'onde, dynamique classique du centre du paquet lancé avec une vitesse donnée. Enfin, la dernière série de tests concerne le système avec le potentiel à étudier, il s'agit de retrouver numériquement des résultats connus par ailleurs, notamment en utilisant la méthode des lois d'échelle.

C.3 En dimension deux

C.3.1 Transformée de Fourier

Soient x et y les deux dimensions du système. On définit L_x , la taille de grille selon l'axe x , n_x , le nombre de points discrétisant L_x , $dx = L_x/(n_x - 1)$, le pas spatial selon l'axe x . Des variables similaires sont définies selon y . $\varphi_{j,k}$ la valeur de la fonction d'onde au point $(x_j, y_k) = (j * dx, k * dy)$. La transformée de Fourier rapide nous donne les valeur de transformée de Fourier ordonnées ainsi :

$$\tilde{\varphi}_{p,l} = \begin{cases} \tilde{\Psi} \left(\frac{(p-1)2\pi}{L_x}, \frac{(l-1)2\pi}{L_y} \right) & \text{pour } p = 1, n_x/2 \text{ et } l = 1, n_y/2 \\ \tilde{\Psi} \left(\frac{(p-1)2\pi}{L_x}, \frac{(l-1-n_y)2\pi}{L_y} \right) & \text{pour } p = 1, n_x/2 \text{ et } l = n_y/2 + 1, n_y \\ \tilde{\Psi} \left(\frac{(p-1-n_x)2\pi}{L_x}, \frac{(l-1)2\pi}{L_y} \right) & \text{pour } p = n_x/2 + 1 \text{ et } l = 1, n_y/2 \\ \tilde{\Psi} \left(\frac{(p-1-n_x)2\pi}{L_x}, \frac{(l-1-n_y)2\pi}{L_y} \right) & \text{pour } p = n_x/2 + 1 \text{ et } l = n_y/2 + 1, n_y. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

C.3.2 Facteur d'évolution libre

On en déduit le facteur de phase à appliquer sur la transformée de Fourier lors des deux étapes "d'évolution libre" :

$$\tilde{\varphi}_{p,l} = \begin{cases} \exp \left(-\frac{i\Delta t}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{(p-1)2\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{(l-1)2\pi}{L_y} \right)^2 \right] \right) & \text{pour } p = 1, n_x/2 \text{ et } l = 1, n_y/2 \\ \exp \left(-\frac{i\Delta t}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{(p-1)2\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{(l-1-n_y)2\pi}{L_y} \right)^2 \right] \right) & \text{pour } p = 1, n_x/2 \text{ et } l = n_y/2 + 1, n_y \\ \exp \left(-\frac{i\Delta t}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{(p-1-n_x)2\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{(l-1)2\pi}{L_y} \right)^2 \right] \right) & \text{pour } p = n_x/2 + 1 \text{ et } l = 1, n_y/2 \\ \exp \left(-\frac{i\Delta t}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{(p-1-n_x)2\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{(l-1-n_y)2\pi}{L_y} \right)^2 \right] \right) & \text{pour } p = n_x/2 + 1 \text{ et } l = n_y/2 + 1, n_y. \end{cases}$$

C.3.3 Contraintes numériques

Les contraintes numériques sont exactement les mêmes qu'en dimension un. Cependant, il est à noter que, en dimension deux, on est plus rapidement sensible aux limites de taille des matrices imposés par les compilateurs. Par exemple, sur les clusters de LCAR, le compilateur ifort ne compile pas lorsque un tableau dépasse 2^{26} éléments.

C.3.4 Tests 2D

Nous présentons dans ce paragraphe un exemple de test du programme 2D. Considérons un condensat sans interaction initialement dans l'état fondamental d'un potentiel harmonique de pulsation $\omega_0 = 150$ Hz. A $t = 0$, le confinement selon l'axe Ox est brusquement coupé à $t = 0$, voir figure C.2). Les lois d'échelles nous donne immédiatement la loi d'évolution de la dispersion du paquet d'onde $\Delta x(t) = b(t)\Delta x(0)$ où l'évolution de $b(t)$ est donnée par :

$$\frac{d^2 b(t)}{dt^2}(t) = \frac{\omega_0^2}{b(t)^2}.$$

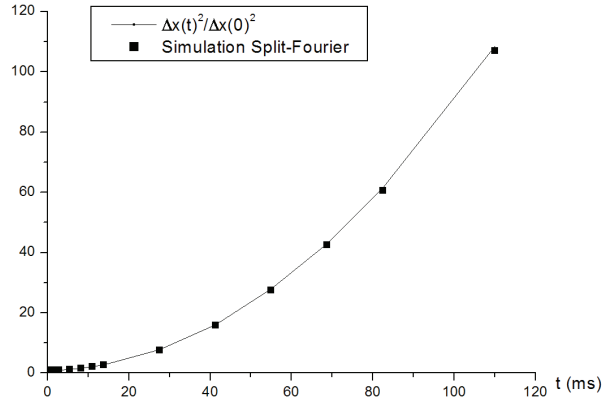


FIGURE C.2 – *Dispersion en position selon l'axe x d'un paquet d'onde à deux dimensions après coupure du puits selon l'axe Ox . L'étalement du paquet d'onde déduit de la simulation suit les prédictions théoriques.*

C.4 Algorithme Split Step Fourier en présence d'interactions

L'évolution de la fonction d'onde est dictée par l'équation de Gross-Pitaevskii où les interactions sont traitées en champ moyen. Par conséquent, seul le terme de potentiel est modifié par rapport au régime sans interactions. Pour adapter l'algorithme précédent il suffit simplement de rajouter un terme de potentiel proportionnel à la densité locale de présence $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ à la date t . Nous devons cependant adapter le pas de temps dt . En effet, les interactions en champ moyen sont vues comme un terme de potentiel et par conséquent peuvent modifier ΔV_{Max} (voir C.2.4).

Cet algorithme permet de calculer la dynamique de la fonction d'onde mais aussi de calculer l'état fondamental au moyen d'une évolution en temps imaginaire.

C.4.1 Dynamique de la fonction d'onde en présence d'interaction

La dynamique d'un condensat de Bose-Einstein à une dimension dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}; t)}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}, t) + N\tilde{g}|\Psi(\mathbf{r}; t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}; t). \quad (\text{C.6})$$

La modification de l'algorithme est immédiate, la seule étape modifiée est le produit dans l'espace réel. Le nouveau terme multiplicatif est

$$\times \exp(-idt(V(\mathbf{r}) + N\tilde{g}|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2)). \quad (\text{C.7})$$

C.4.2 Fonction d'onde de l'état fondamental par propagation en temps imaginaire

La propagation en temps imaginaire est une astuce mathématique, permettant de calculer l'état fondamental d'un potentiel donné en présence ou non d'interaction [66]. En effet, en posant $t = -i\tau\hbar$, l'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit :

$$-\frac{\partial \Psi(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + N\tilde{g}|\Psi(\mathbf{r}; \tau)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}; \tau) = H\Psi(\mathbf{r}; \tau). \quad (\text{C.8})$$

Les états propres ψ_i de H ($H\psi_i = E_i\psi_i$), ont une dynamique en temps imaginaire dictée par C.8 : $\partial\psi_i(x; \tau)/\partial\tau = -E_i\psi_i(x; \tau)$, et qui s'intègre :

$$\psi_i(\tau) = \exp(-E_i\tau)\psi_i(0). \quad (\text{C.9})$$

Ainsi, en propagation en temps imaginaire, toutes les fonctions propres des états excités d'énergie E_i vont décroître de façon exponentielle par rapport à l'état fondamental d'énergie propre inférieure. L'algorithme consiste à choisir un état, qui est une combinaison de différents états propres. En pratique l'état fondamental du cas sans interaction répond bien à ce critère. Lors de l'évolution de cet état en temps imaginaire, où dt est remplacé par $-idt$, la projection sur l'état fondamental va survivre. Toutes les projections sur les fonctions propres des états excités vont décroître exponentiellement et ce d'autant plus vite que leur énergie propre est grande. A chaque étape temporelle, on renormalise à 1 la fonction d'onde. On considère que le calcul a convergé lorsque, à la précision souhaitée, l'état fondamental n'évolue plus en temps imaginaire.

C.4.3 Tests de l'algorithme en présence d'interactions

Nous disposons de plusieurs tests sur la fonction d'onde statique ou sur son évolution temporelle dans des cas connus :

- (i) Comparaison au profil de Thomas-Fermi.
- (ii) Stabilité de l'état au cours d'une évolution en temps réel. L'état fondamental, est par définition, un état propre du système. La densité de probabilité de présence n'évolue pas au cours du temps.
- (iii) Oscillations de période $2\pi/\omega_0$ dans un potentiel harmonique de pulsation.
- (vi) Monopole à $\sqrt{3}\omega_0$, en dimension un.

C.5 Implémentation de bords absorbants

Lors de l'étude, par exemple, du piégeage partiel d'un paquet d'onde dans un potentiel réseau, seule la dynamique de la partie piégée nous intéresse. Cependant, la partie non-piégée va explorer la grille entière et au contact d'un bord passer de l'autre côté de la grille et interférer à nouveau avec le réseau. Il est donc nécessaire *a priori* que la grille soit suffisamment grande pour que lors de l'étude de la partie piégée, la partie non-piégée ne

rencontre pas de bords. Un moyen de limiter la grille de calcul, et donc le temps d'exécution, est la mise en place de bords absorbants. La fonction d'onde, au contact du bord est absorbée et ne passe pas de l'autre côté. Une première approche naïve consisterait à mettre à zéro la fonction d'onde à partir d'une certaine distance du système étudié. Cependant, la partie où la fonction d'onde est nulle se comporte comme un mur de potentiel et la fonction d'onde se réfléchit en partie. La méthode la plus efficace consiste à ajouter, au potentiel réel du système $V(x, t)$, un potentiel à partie imaginaire négative sur les bords [67]. Le nouveau potentiel de calcul s'écrit :

$$V_{\text{ABC}}(x, t) = V(x, t) - iV_{\text{I}}(x). \quad (\text{C.10})$$

Nous détaillerons ici, le cas où $V_{\text{I}}(x)$ est un potentiel linéaire de largeur $\Delta_x = b - a$ et de hauteur moyenne $V_{\text{I}0}$ positive, voir figure (C.3) :

$$V_{\text{I}}(x) = \begin{cases} V_{\text{I}0} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Soit E , l'énergie cinétique moyenne du paquet à absorber, $V_{\text{I}0}$ et Δ_x doivent vérifier les inégalités suivantes [67] :

$$\frac{E^{1/2}}{\hbar \Delta_x \sqrt{8m}} < V_{\text{I}0} < E^{3/2} (\hbar \Delta_x \sqrt{8m}). \quad (\text{C.12})$$

L'inégalité de gauche assure $V_{\text{I}0}$ soit suffisant pour absorber pratiquement toute la fonction d'onde. L'inégalité de droite assure que la transition vers le potentiel absorbant soit suffisamment douce pour éviter une réflexion par celui-ci. L'implémentation de bords absorbant ne nécessite pas de renormaliser la fonction d'onde.

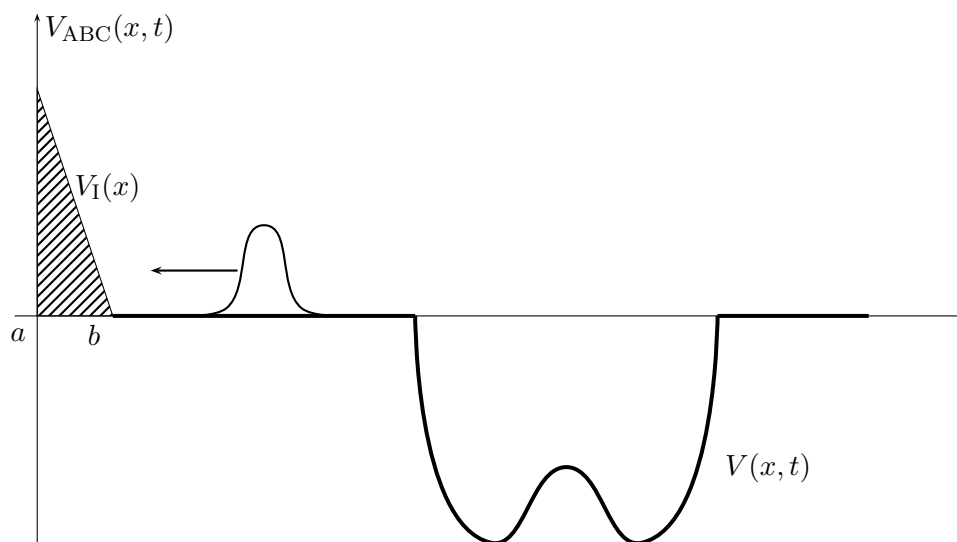


FIGURE C.3 – Exemple des différents potentiels. Le potentiel $V_I(x)$ est imaginaire et permet l'absorption de la fonction d'onde.

Annexe D

Représentations dans l'espace des phase

Pour un système quantique, le principe d'incertitude d'Heisenberg interdit une représentation directe dans l'espace des phases car la position x et la quantité de mouvement p ne peuvent pas avoir simultanément des valeurs bien définies. Cependant, il est possible de construire des *pseudo*-probabilités qui possèdent des propriétés proches de celles d'une distribution de probabilité classique.

D.1 Wigner

La fonction de Wigner se définit ainsi

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ipy} \Psi(x+y) \Psi^*(x-y) dy.$$

Les probabilités $W(x)$ et $W(p)$ de trouver le système dans les états respectifs x et p sont

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p), \quad W(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p).$$

$|W(x, p)|$ est une *pseudo*-densité de probabilité de trouver le système au point (x, p) dans l'espace des phases.

D.2 Représentation de Husimi

La distribution de Husimi se définit comme le produit scalaire entre l'état $|\Psi\rangle$ et un paquet d'onde gaussien [68] :

$$Q(x, p) = \left| \int \langle x, p | x' \rangle \langle x' | \Psi \rangle dx' \right|^2 \quad \text{avec} \quad \langle x' | x, p \rangle = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{i\frac{px'}{\hbar}} e^{\left(-\frac{(x'-x)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (\text{D.1})$$

Cette distribution peut s'exprimer en fonction de la distribution de Wigner :

$$Q(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \int dx' dp' e^{\left(-\frac{(x'-x)^2}{2\sigma^2}\right)} e^{\left(-\frac{(p'-p)^2}{2\sigma_p^2}\right)} W(x', p') \quad \text{avec } \sigma\sigma_p = \frac{\hbar}{2}$$

La fonction de Husimi peut être vue comme le lissage de la fonction de Wigner par une gaussienne d'incertitude minimale. Elle peut aussi être interprétée comme la moyenne de la fonction d'onde sur une ellipsoïde d'aire $\hbar/2$ et d'axes σ et σ_p . La valeur de σ permet de choisir le compromis entre la résolution en x ou en p . La fonction de Husimi se calcule exactement, de manière similaire à la fonction de Wigner, dans le cas d'une fonction d'onde gaussienne dans un potentiel linéaire en utilisant le formalisme hydrodynamique. La distribution de Husimi $Q(x, p)$ se calcule exactement, où ¹

$$Q(x, p) = \mathcal{N} e^{a_1(p-p_0)^2 + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)(p-p_0)}. \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x_0} \frac{1}{\lambda(t)} \frac{\pi}{|\eta|} e^\chi, & a_1 &= -\frac{\alpha}{2(\alpha^2+\beta^2)\hbar^2}, & a_2 &= \frac{-1}{\sigma^2} + \frac{\alpha}{2(\alpha^2+\beta^2)\sigma^4}, \\ a_3 &= \frac{\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\hbar\sigma^2}, & p_0 &= m\dot{x}_0(t) & \text{avec } \chi &= \frac{-x_0(t)^2}{2\Delta x_0^2\lambda(t)^2} - \frac{\alpha m^2 \dot{x}_0^2(t)}{2(\alpha^2+\beta^2)\hbar^2} + \\ & \frac{\alpha x_0(t)^2}{8(\alpha^2+\beta^2)\Delta x_0^4\lambda^4(t)} - \frac{\alpha m^2 \dot{\lambda}(t)^2 x_0^2(t)}{2(\alpha^2+\beta^2)\hbar^2\lambda^2(t)} + \frac{\alpha m^2 \dot{\lambda}(t)x_0\dot{x}_0(t)}{\hbar^2(\alpha^2+\beta^2)\lambda(t)} + \frac{\beta m \dot{\lambda}(t)x_0(t)^2}{2(\alpha^2+\beta^2)\hbar\lambda^3(t)\Delta x_0^2} - \frac{\beta m \dot{x}_0(t)x_0}{2(\alpha^2+\beta^2)\hbar\Delta x_0^2\lambda(t)^2}, & \alpha &= \\ & \frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{4\Delta x_0^2\lambda(t)^2}, & \beta &= \frac{m\lambda(t)}{2\hbar\lambda(t)}. \end{aligned}$$

Annexe E

Système d'unités des programmes développés

E.0.1 Unités du système

Nous présentons dans cette appendice, le système d'unités utilisé dans tous les programmes écrits pendant ma thèse. Dans ce système, \hbar et m la masse du ^{87}Rb valent 1. Nous choisissons comme unité de longueur le micromètre, qui s'avère l'ordre de grandeur typique des longueurs des problèmes que nous étudions. L'unité de temps découle du choix de ces trois unités. Le tableau suivant résume les différentes unités de ce système.

Noms	Unités	Valeurs en système SI
Masse	m	$1.45 \times 10^{-25} \text{ kg}$
Longueur	ℓ	$1 \times 10^{-6} \text{ m}$
Temps	$t = \frac{m\ell^2}{\hbar}$	$1.374966067 \times 10^{-3} \text{ s}$

FIGURE E.1 – *Système d'unités utilisé dans les codes fortran de cette thèse. m, ℓ et t sont des grandeurs dimensionnées.*

Dans ce système d'unité, la vitesse, le nombre d'onde et l'impulsion ont la même valeur.

E.0.2 Passage d'un système à l'autre

Toutes les grandeurs utilisées dans les programmes sont adimensionnées. Pour passer d'une grandeur du système programme à sa valeur dans le système d'unité international, on multiplie cette grandeur par l'unité dimensionnée correspondante (deuxième colonne du tableau, valeur dans la troisième colonne). Par exemple, si \tilde{e} est la valeur d'une énergie dans le système programme, cette énergie dans le système international vaut $\tilde{e} m\ell^2/t^2$.

Bibliographie

- [1] Lev. P. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. 2004.
- [2] Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov. Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential. *Phys. Rev. A*, 54(3) :R1753–R1756, Sep 1996.
- [3] Y. Castin and R. Dum. Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps. *Phys. Rev. Lett.*, 77(27) :5315–5319, Dec 1996.
- [4] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71(3) :463–512, Apr 1999.
- [5] E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar. Interisotope determination of ultracold rubidium interactions from three high-precision experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 88(9) :093201, Feb 2002.
- [6] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick. Solitary waves in clouds of Bose-Einstein condensed atoms. *Phys. Rev. A*, 58(3) :2417–2422, Sep 1998.
- [7] A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle. Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 87(13) :130402, Sep 2001.
- [8] F. Dalfovo, L. Pitaevskii, and S. Stringari. Order parameter at the boundary of a trapped bose gas. *Phys. Rev. A*, 54(5) :4213–4217, Nov 1996.
- [9] François Impens and David Guéry-Odelin. Classical phase-space approach for coherent matter waves. *Phys. Rev. A*, 81 :065602, Jun 2010.
- [10] Xi Chen, A. Ruschhaupt, S. Schmidt, A. del Campo, D. Guéry-Odelin, and J. G. Muga. Fast optimal frictionless atom cooling in harmonic traps : Shortcut to adiabaticity. *Phys. Rev. Lett.*, 104(6) :063002, Feb 2010.
- [11] J. Anandan and Y. Aharonov. Geometry of quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 65 :1697–1700, Oct 1990.

- [12] Xi Chen and J. G. Muga. Transient energy excitation in shortcuts to adiabaticity for the time-dependent harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, 82 :053403, Nov 2010.
- [13] E. Torrontegui, S. Ibáñez, Xi Chen, A. Ruschhaupt, D. Guéry-Odelin, and J. G. Muga. Fast atomic transport without vibrational heating. *Phys. Rev. A*, 83 :013415, Jan 2011.
- [14] F. Vermersch, C. M. Fabre, P. Cheiney, G. L. Gattobigio, R. Mathevet, and D. Guéry-Odelin. Guided-atom laser : Transverse mode quality and longitudinal momentum distribution. *Phys. Rev. A*, 84 :043618, Oct 2011.
- [15] W. Guerin, J.-F. Riou, J. P. Gaebler, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect. Guided quasicontinuous atom laser. *Phys. Rev. Lett.*, 97(20) :200402, Nov 2006.
- [16] A. Couvert, M. Jeppesen, T. Kawalec, G. Reinaudi, R. Mathevet, and David Guéry-Odelin. A quasi-monomode guided atom laser from an all-optical Bose-Einstein condensate. *Europhys. Lett.*, 83 :50001, 2008.
- [17] G. L. Gattobigio, A. Couvert, M. Jeppesen, R. Mathevet, and D. Guéry-Odelin. Multimode-to-monomode guided atom lasers : An entropic analysis. *Phys. Rev. A*, 80 :041605(R), 2009.
- [18] G. Kleine Büning, J. Will, W. Ertmer, C. Klempt, and J Arlt. A slow gravity compensated atom laser. *Appl. Phys. B*, 100 :117, 2010.
- [19] R. G. Dall, S. S. Hodgman, M. T. Johnsson, K. G. H. Baldwin, and A. G. Truscott. Transverse mode imaging of guided matter waves. *Phys. Rev. A*, 81 :011602, Jan 2010.
- [20] G. L. Gattobigio, A. Couvert, B. Georgeot, and D. Guéry-Odelin. Interaction of a propagating guided matter wave with a localized potential. *New J. Phys.*, 12 :085013, 2010.
- [21] I. Carusotto and G. C. La Rocca. The modulated optical lattice as an atomic fabry-perot interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :399, 2000.
- [22] A. Bernard, W. Guerin, J. Billy, F. Jendrzejewski, P. Cheinet, A. Aspect, V. Josse, and P. Bouyer. Quasi-continuous horizontally guided atom laser : coupling spectrum and flux limits. *New J. Phys.*, 13 :065015, 2011.
- [23] G. L. Gattobigio, A. Couvert, G. Reinaudi, B. Georgeot, and D. Guéry-Odelin. Optically guided beam splitter for propagating matter waves. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :030403, Jul 2012.
- [24] G. L. Gattobigio, A. Couvert, B. Georgeot, and D. Guéry-Odelin. Exploring classically chaotic potentials with a matter wave quantum probe. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :254104, Dec 2011.
- [25] E. Turlot. *Dynamique de l'effet tunnel quantique macroscopique d'une jonction Josephson*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1990.

-
- [26] James A. Stickney and Alex A. Zozulya. Expansion of a Bose-Einstein condensate from a microtrap into a waveguide. *Phys. Rev. A*, 65 :053612, May 2002.
- [27] Oliver Morsch and Markus Oberthaler. Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices. *Rev. Mod. Phys.*, 78 :179–215, Feb 2006.
- [28] I. Carusotto, M. Artoni, and G. C. La Rocca. Atom-laser coherence length and atomic standing waves. *Phys. Rev. A*, 62(6) :063606, Nov 2000.
- [29] Luis Santos and Luis Roso. A band-like reflection spectrum of an atomic beam on a periodic laser profile. *J. Phys. B*, 30 :5169, 1997.
- [30] Luis Santos and Luis Roso. Multilayer “dielectric” mirror for atoms. *Phys. Rev. A*, 58 :2407–2412, Sep 1998.
- [31] C. M. Fabre, P. Cheiney, G. L. Gattobigio, F. Vermersch, S. Faure, R. Mathevet, T. Lahaye, and D. Guéry-Odelin. Realization of a distributed bragg reflector for propagating guided matter waves. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :230401, Nov 2011.
- [32] J. H. Huckans, I. B. Spielman, B. Laburthe Tolra, W. D. Phillips, and J. V. Porto. Quantum and classical dynamics of a Bose-Einstein condensate in a large-period optical lattice. *Phys. Rev. A*, 80 :043609, Oct 2009.
- [33] P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi, and M. Inguscio. Expansion of a Coherent Array of Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :220401, Nov 2001.
- [34] L.D. Landau. *Quantum Mechanics*.
- [35] J. E. Sträng. On the characteristic exponents of floquet solutions to the mathieu equation. *arXiv :math-ph/0510076v1*.
- [36] C. M. Fabre and D. Guéry-Odelin. A class of exactly solvable models to illustrate supersymmetry and test approximation methods in quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 79 :755, 2011.
- [37] N. Friedman, R. Ozeri, and N. Davidson. Quantum reflection of atoms from a periodic dipole potential. *Journal of the Optical Society of America B*, 15 :1749–1756, 1998.
- [38] C. M. Fabre. *Miroirs de Bragg pour ondes de matière et apport de la supersymétrie aux potentiels exponentiels*. PhD thesis, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2012.
- [39] P. Cheiney, C. M Fabre, F. Vermersch, G. L. Gattobigio, R. Mathevet, T. Lahaye, and D. Guéry-Odelin. Matter wave scattering on an amplitude-modulated optical lattice. *arXiv : . 1206.3687v1*, 2012.
- [40] A. Ruschhaupt and J. G. Muga. Atom diode : A laser device for a unidirectional transmission of ground-state atoms. *Phys. Rev. A*, 70 :061604, Dec 2004.

- [41] Stefan Bernet, Markus K. Oberthaler, Roland Abfalterer, Jörg Schmiedmayer, and Anton Zeilinger. Coherent frequency shift of atomic matter waves. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :5160–5163, Dec 1996.
- [42] T Lauber, P Massignan, G Birkel, and A Sanpera. Atomic wave packet dynamics in finite time-dependent optical lattices. *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys*, 44 :065301, 2011.
- [43] F. Sols, M. Macucci, U. Ravaioli, and K. Hess. Theory for a quantum modulated transistor. *J. Appl. Phys*, 66 :3892, 1989.
- [44] M. Macucci, U. Ravaioli, and K. Hess. On the possibility of transistor action based on quantum interference phenomena. *Appl. Phys. Lett.*, 54 :350, 1989.
- [45] T. Bergeman, M. G Moore, and M. Olshanii. Atom-atom scattering under cylindrical harmonic confinement : Numerical and analytic studies of the confinement induced resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :163201, 2003.
- [46] M. Olshanii. Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :938, 1998.
- [47] Vanja Dunjko, Michael G. Moore, Thomas Bergeman, and Maxim Olshanii. Confinement-induced resonances. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 60 :461, 2011.
- [48] D. S. Petrov, M. Holzmann, and G. V. Shlyapnikov. Bose-einstein condensation in quasi-2d trapped gases. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :2551, 2000.
- [49] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, and S. Giorgini. Beyond the tonks-girardeau gas : Strongly correlated regime in quasi-one-dimensional bose gases. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :190407, 2005.
- [50] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss. *Science*, 305 :1125, 2004.
- [51] E. Haller, M. Gustavsson, M. J. ark, J. G. Danzl, R. Hart, G. Pupillo, and H.-C. Nägerl. Realization of an excited, strongly correlated quantum gas phase. *Science*, 325 :1224, 2009.
- [52] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hansch, and Bloch I. Tonks girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice. *Nature*, 429 :277, 2004.
- [53] Elmar Haller, Manfred J. Mark, Russell Hart, Johann G. Danzl, Lukas Reichsöllner, Vladimir Melezhik, Peter Schmelcher, and Hanns-Christoph Nägerl. Confinement-induced resonances in low-dimensional quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :153203, 2010.

- [54] G. Lamporesi, J. Catani, G. Barontini, Y. Nishida, M. Inguscio, and F. Minardi. Scattering in mixed dimensions with ultracold gases. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :153202, 2010.
- [55] P. O. Fedichev, M. J. Bijlsma, and P. Zoller. Extended molecules and geometric scattering resonances in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :080401, 2004.
- [56] Michael Köhl, Henning Moritz, Thilo Stöferle, Kenneth Günter, and Tilman Esslinger. Fermionic atoms in a three dimensional optical lattice : Observing fermi surfaces, dynamics, and interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :080403, 2005.
- [57] Z. Hadzibabic, S. Stock, Battelier B., Bretin, and Dalibard J. Interference of an array of independent bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :180403, 2004.
- [58] Hubert Ammann and Nelson Christensen. Delta kick cooling : A new method for cooling atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :2088–2091, Mar 1997.
- [59] Navarro, B. Egusquiza, I. L. Muga, J. G. Hegerfeldt, and G. C. Suppression of Rabi oscillations for moving atoms. *Phys. Rev. A*, 67(6) :063819, Jun 2003.
- [60] Kathryn Moler, David S. Weiss, Mark Kasevich, and Steven Chu. Theoretical analysis of velocity-selective raman transitions. *Phys. Rev. A*, 45(1) :342–348, Jan 1992.
- [61] J. I. Cirac, A. K. Ekert, and C. Macchiavello. Optimal purification of single qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :4344–4347, May 1999.
- [62] J. G. Muga and B. Navarro. Optical analog of Rabi oscillation suppression due to atomic motion. *Phys. Rev. A*, 73 :022715, Feb 2006.
- [63] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 90*. 1992.
- [64] H. Yoshida. Recent progress in the theory and application of symplectic integrators. *Celestial mechanics and dynamical astronomy*, 56 :27, 1993.
- [65] M. D. Feit, J. A. Fleck, and A. Steiger. Solution of the schrodinger equation by a spectral method. *Journal of Computational Physics*, 47 :412, 1982.
- [66] P. Muruganandam and S. K. Adhikari. Fortran programs for the time-dependent gross-pitaevskii equation in a fully anisotropic trap. *Preprint submitted to Computer Physics Communication*, arXiv :0904.3131v4.
- [67] D Neuhasuer and M Baer. The time-dependent schrodinger equation : Application of absorbing boundary conditions. *J. Chern. Phys.*, 90 :4351, 1989.
- [68] S. Haroche. *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities, And Photons*. 2006.

Résumé

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du développement de l'optique atomique, et en particulier de l'optique atomique guidée. Le manuscrit comprend deux volets. Le premier concerne des modélisations numériques sur la production contrôlée d'ondes de matière guidée à partir d'un condensat de Bose-Einstein. Les limites en dispersion de vitesse de l'onde de matière découplée ou encore la contamination éventuelle des degrés de liberté transverses sont abordés. Un bon accord avec les résultats expérimentaux de l'équipe ont été obtenus. Le deuxième volet de la thèse porte sur des expériences de diffusion d'ondes de matière sur des potentiels façonnés. Nous nous sommes attachés à définir les variables pertinentes pour la compréhension de la diffusion sur un obstacle localisé. Deux études portant sur la diffusion sur un réseau optique statique puis modulé en amplitude ont été menées en lien étroit avec les activités expérimentales du groupe. Un filtre passe-bande en vitesse a pu ainsi être démontré. Ces travaux démontrent la transposition de l'optique diélectrique à l'optique atomique. D'autres études portent sur des cas de diffusion non unidimensionnelle où des résonances induites par le confinement ont été identifiées ou encore sur des systèmes où les degrés de liberté interne et externe sont couplés dans le processus de diffusion.

Abstract

This thesis provides a contribution to the development of atom optics, and in particular to guided atom optics. This manuscript consists of two parts. The first concerns numerical models of the controlled production of guided matter waves from Bose-Einstein condensates. We discuss the limits on the velocity dispersion of an outcoupled matter wave and the possible contamination of the transverse degrees of freedom in the course of the out coupling process. A good agreement with experimental results of our team has been obtained. The second part of the thesis focuses on matter wave scattering experiments on shaped potentials. We have obtained the relevant variables to understanding the scattering on a localized defect. Two studies on the scattering on a static optical lattice and then on an amplitude-modulated lattice are presented in close collaboration with the experimental activities of the group. These studies demonstrate the feasibility of a velocity bandpass filter. This work demonstrates also the transposition of dielectric optics principles to atom optics. Other studies focus on a two-dimensional scattering where resonances induced by confinement have been identified and also on systems in which internal and external degrees of freedom are coupled during the scattering.